- Zdarzenia B i C wykluczają się $B \cap C = \varnothing$ – oznacza to, że zdarzenia te nie mogą zajść łącznie,
- Zdarzenie C pociąga zdarzenie A: $C \subset A$, co oznacza, że gdy zajdzie zdarzenie C, to także zajdzie zdarzenie A.

§2. Prawdopodobieństwo

2.1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeśli zbiór zdarzeń elementarnych jest skończony i każde zdarzenie elementarne ma te same szansę zajścia, to prawdopodobieństwo zdarzenia A wyraża się wzorem

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ *– liczba zdarzeń elementarnych należących do zdarzenia A (sprzyjających zdarzeniu A),* $\overline{\overline{\Omega}}$ *– liczba wszystkich zdarzeń elementarnych.*

Przykład 8

Rzut kostką. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – wyrzucenie parzystej liczby oczek,

$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ – wyrzucenie co najmniej 3 oczek,

$C = \{\omega_3\}$ – wyrzucenie 3 oczek.

Ponieważ spełnione są założenia klasycznej definicji prawdopodobieństwa (zakładamy, że kostka jest symetryczna zbudowana z jednorodnego materiału) więc prawdopodobieństwa powyższych zdarzeń są równe

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{6}$$

Widzimy, że ze zdarzeń *A, B, C* najbardziej prawdopodobne jest zdarzenie B, zaś najmniej prawdopodobne jest zdarzenie C. Oznacza to, że gdy rzucimy kostką, to największe szansę zajścia ma zdarzenie B, natomiast najmniejsze szansę ma zdarzenie C. Może się jednak zdarzyć, że żadne z tych zdarzeń nie zajdzie (gdy wyrzucimy jedno oczko). Ponadto mamy

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{\overline{\overline{\Omega}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{n}{n} = 1, \qquad \mathrm{P}(\varnothing) = \frac{\overline{\overline{\varnothing}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{0}{n} = 0$$

czyli prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1 (największe prawdopodobieństwo), zaś zdarzenia niemożliwego jest równe zeru (najmniejsze prawdopodobieństwo).

2.2. Własności prawdopodobieństwa

Twierdzenie 1

1. *Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest liczbą zawartą między zero a jeden* $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$
2. *Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe jeden* $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
3. *Dla dowolnych zdarzeń A, B wykluczających się prawdopodobieństwo sumy jest równe sumie ich prawdopodobieństw*
   $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$
4. *Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zeru*
   $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
5. *Jeśli zdarzenia* $A_1, \dots A_n$ *wykluczają się, to prawdopodobieństwo sumy jest równe sumie prawdopodobieństw*
   $\mathrm{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$
6. *Jeśli* $A \subset B$, to $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$
7. *Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo ich iloczynu*
   $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
8. *Prawdopodobieństwo zdarzenia jest równe różnicy jedności i prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego do tego zdarzenia*
   $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A')$

Powyższe własności prawdopodobieństwa wynikają bezpośrednio z klasycznej definicji.
Uwaga. Na podstawie własności 1-3 można udowodnić pozostałe własności prawdopodobieństwa.

Przykład 9

Wiadomo, że $P(A') = 0{,}6,\ P(B) = 0{,}5,\ P(A \cap B') = 0{,}2.$ Obliczymy $P(A \cup B')$.

Rozwiązanie. Z własności 7 mamy

$\mathrm{P}(A \cup B') = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(A \cap B')$.

Ale z własności 8

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ i $P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$,

więc

$P(A \cup B') = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$

Odp. $P(A \cup B') = 0{,}7$

2.3. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa odnosi się do doświadczeń losowych o skończonym zbiorze zdarzeń elementarnych, mających te same szansę zajścia. Istnieje jednak wiele doświadczeń losowych o dużym znaczeniu praktycznym, dla których powyższe założenia nie są spełnione. Dlatego definicja prawdopodobieństwa powinna być rozszerzona na dowolne doświadczenia losowe.

Prawdopodobieństwo jest to dowolna funkcja P przyporządkowująca każdemu zdarzeniu losowemu A liczbę P(A), zwaną prawdopodobieństwem zdarzenia A tak by spełnione były warunki (aksjomaty)

I $\quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

II $\quad \mathrm{P}(\Omega) = 1$

III *Dla dowolnego ciągu zdarzeń* $A_1, A_2, \ldots$ *parami wykluczających się* $(A_i \cap A_j = \varnothing,\ \text{dla } i \neq j)$

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_1) + \ldots$$

Powyższą definicję nazywamy aksjomatyczną, gdyż podaje ona warunki (aksjomaty) jakie powinna spełniać funkcja P by można ją było nazwać prawdopodobieństwem, natomiast nie podaje wprost jak obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń. Prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń można określać rozmaicie byleby były spełnione aksjomaty I – III.
Zauważmy, że aksjomaty I oraz II są identyczne jak własności 1 i 2 prawdopodobieństwa wynikające z klasycznej definicji, natomiast aksjomat III jest uogólnieniem własności 3 na przeliczalnie wiele zdarzeń.