

*Wydaje się,
że ludzki rozum musi najpierw samodzielnie konstruować formy,
zanim możemy je stwierdzić w rzeczach.
Albert Einstein¹*

ROZDZIAŁ II

MODELOWANIE DYNAMIKI OBIEKTÓW STEROWANIA

Sterowanie w najprostszym ujęciu polega na włączaniu i wyłączaniu urządzeń dostarczających energię do sterowanych procesów. Może to być np. włączenie silnika powodującego przemieszczanie się wózka, może to być także włączenie grzejnika w celu uzyskania wyższej temperatury. Skutki zadziałania sterowania nie są natychmiastowe. Przewidywanie skutków włączenia urządzenia nie jest więc sprawą prostą i polega na analizie odpowiednich procesów gromadzenia energii.

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione metody oceny skutków sterowania. Podstawowym wymaganiami, z punktu widzenia realizacji zadań sterowania, jest uzyskanie zależności funkcyjnej² między wymuszeniem a odpowiedzią układu. Jest dość oczywiste, że takiej zależności nie uzyskamy dla wartości chwilowych, np. bieżąca wartość temperatury zależy nie tylko od bieżącej mocy grzejnika, ale także od całego dotychczasowego przebiegu grzania. W tej sytuacji można próbować poszukiwać zależności funkcyjnej między sygnałem wejściowym a sygnałem wyjściowym. Tu jednak pojawia się następny kłopot, wynikający z faktu, że zwykle w układach gromadzących energię odpowiedź zależy także od stanu początkowego, np. bieżąca wartość temperatury zależy nie tylko od całego dotychczasowego przebiegu grzania, ale także od początkowej temperatury substancji ogrzewanej.

W dalszym ciągu tego rozdziału poszukiwać będziemy zależności funkcyjnej między wymuszeniem a odpowiedzią układu. W szczególności pokażemy, że możliwe jest wyrugowanie zależności odpowiedzi od stanu początkowego. Możliwość ta jest zwykle związana bądź z przyjęciem zerowego

¹ Albert Einstein, *Pisma filozoficzne*, De Agostini Polska, Warszawa, 2001, str. 136.

² Oznacza to, że jeśli na układ będą podane dwa jednakowe wymuszenia, to odpowiedzi układu nie mogą być różne.

stanu początkowego w chwili t_0 podania wymuszenia, bądź z przesunięciem chwili początkowej do wartości $t_0 = -\infty$. W rezultacie zastosowania jednego z tych zabiegów można uzyskać zależność funkcyjną wyjścia od wejścia dla układów gromadzących energię (przy braku zależności od stanu początkowego).

*Jeżeli naukowe wnioskowanie zastąpiło wnioskowanie zabobonne,
to nie stało się to dzięki jakiemuś wydoskonaleniu wrażliwości zmysłowej,
czy też naturalnemu działaniu funkcji sugestji.
Postęp ten jest wynikiem uregulowania i sprecyzowania warunków,
w których odbywa się obserwacja i wnioskowanie.
John Dewey³*

5. Sygnały i układy

Wyodrębnienia układu z otoczenia będziemy dokonywać przez określenie dla niego sygnałów wejściowych i sygnałów wyjściowych. Sygnał wejściowy reprezentuje zewnętrzne przyczyny zmian w układzie, wyjściowy zaś – ich skutek. Zdefiniowanie tych sygnałów jest równoznaczne z ustaleniem kierunku przenoszenia sygnałów. Sygnał wyjściowy będziemy interpretować jako odpowiedź układu na wymuszenie rozumiane jako sygnał wejściowy. Zakładać będziemy dalej, że wszystkie rozpatrywane układy spełniają warunek jednokierunkowości przenoszenia sygnałów. W przypadkach nieprowadzących do niejednoznaczności sformułowań będziemy używać nazwy *wejście* zamiast *sygnał wejściowy* i *wyjście* – zamiast *sygnał wyjściowy*.

Sygnały będziemy rozumieć jako funkcje czasu:

- sygnał wejściowy jako funkcję $u : T \rightarrow U$, gdzie: T – zbiór chwil czasowych, U – zbiór możliwych wartości sygnału wejściowego,
- sygnał wyjściowy jako funkcję $y : T \rightarrow Y$, gdzie: T – zbiór chwil czasowych, Y – zbiór możliwych wartości sygnału wyjściowego.

W związku z tym wyróżnia się dwa zasadnicze typy układów:

- układy z czasem ciągłym (ang. *continuous-time system*), charakteryzujące się tym, że sygnały wejściowe i wyjściowe są sygnałami czasu ciągłego (co oznacza, że $T = \mathbf{R}$, gdzie: \mathbf{R} – zbiór liczb rzeczywistych),
- układy z czasem dyskretnym (ang. *discrete-time system*), charakteryzujące się tym, że sygnały wejściowe i wyjściowe są sygnałami czasu dyskretnego (co oznacza, że $T = \mathbf{N}$, gdzie: \mathbf{N} – zbiór liczb całkowitych).

³ John Dewey (przeł. Z. Bastgenówna), *Jak myślimy*, De Agostini Polska, Warszawa, 2002, str. 24.

Rozpatrywać będziemy układy, które jednoznacznie przekształcają sygnał wejściowy w sygnał wyjściowy, tj. takie, dla których istnieje funkcja F przyporządkowująca sygnałowi wejściowemu u sygnał wyjściowy y . Właściwość ta oznacza, że jeśli $y_1 = F(u)$ oraz $y_2 = F(u)$, to $y_1 = y_2$.

Przykład 5.1. Przyjmijemy oznaczenia: $u(t)$ – przyspieszenie w chwili t , $y(t)$ – prędkość w chwili t . Zdefiniujemy układ poprzez określenie jego działania funkcją $y = F(u)$, przy czym dla $t \geq t_0$

$$(5.1) \quad y(t) = F(u)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

Widoczna jest zależność wartości sygnału wyjściowego y od sygnału wejściowego u (dokładniej: wartość $y(t)$ sygnału wyjściowego y zależy od wszystkich wartości sygnału wejściowego u w przedziale (t_0, ∞)). Istotne jest, aby zauważyć, że nie istnieje zależność funkcyjna wartości $y(t)$ od wartości $u(t)$.

Układ spełniający warunek:

$$(5.2) \quad F(u)(t) = h(u(t), t)$$

gdzie: $h: U \times T \rightarrow Y$, nazywa się *statycznym*. Zwróćmy uwagę, że układ rozpatrywany w przykładzie 5.1 nie jest statyczny.

Rozpatrywać będziemy układy, dla których stosowanie opisu w postaci zależności (5.2) nie jest możliwe. Najczęściej w takich układach chwilowa wartość odpowiedzi $y(t) = F(u)(t)$ zależy nie tylko od aktualnej chwilowej wartości wymuszenia $u(t)$, ale także od wartości wymuszeń w chwilach poprzednich⁴. Zależność taka jest związana najczęściej z procesem gromadzenia energii. Odpowiedź układu jest zależna od zgromadzonej energii – stanowiącej wynik uprzedniego działania wymuszenia, najczęściej siły. Interpretacja ta dobrze koresponduje z nazwą *układ dynamiczny*⁵, zwykle stosowaną do określenia rozpatrywanych układów.

Układ nazywa się *liniowym*, jeśli spełnia zasadę superpozycji:

$$(5.3) \quad F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 F(u_1) + \alpha_2 F(u_2)$$

gdzie: α_i – liczby rzeczywiste, u_i – sygnały wejściowe.

⁴ Jest to właściwość układów przyczynowych (patrz punkt 6). W ogólnym przypadku wartość $y(t) = F(u)(t)$ odpowiedzi może zależeć od wszystkich wartości wymuszenia $u(t)$, $t \in T$.

⁵ Od gr. *dýnamis* – siła.

Układ dynamiczny nazywa się *stacjonarnym*, jeśli dla dowolnego sygnału wejściowego u spełnia warunek:

$$(5.4) \quad F(u_0)(t) = F(u)(t - t_0) \quad t, t_0 \in T$$

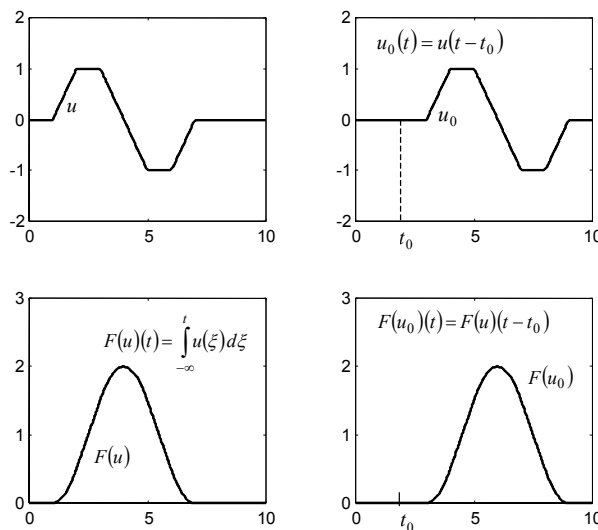
gdzie:

$$(5.5) \quad u_0(t) = u(t - t_0) \quad t, t_0 \in T$$

Sygnal $F(u)$ jest odpowiedzią układu na wymuszenie u . Sygnal u_0 oznacza opóźnione wymuszenie u , sygnal $F(u_0)$ jest odpowiedzią układu na to opóźnione wymuszenie. Warunek (5.4) oznacza, że odpowiedź $F(u_0)$ stanowi opóźniony sygnał $F(u)$. Inaczej mówiąc, jeśli wymuszenie jest przesunięte w czasie, to odpowiedź układu ulega identycznemu przesunięciu w czasie, a poza tym pozostaje niezmienna. Warunek ten jest spełniony przez układy, których właściwości nie zmieniają się w czasie. Przedstawiona właściwość stacjonarności układów dynamicznych w sposób oczywisty przenosi się na układy statyczne. Układ statyczny jest stacjonarny, jeśli

$$(5.6) \quad F(u)(t) = h(u(t))$$

gdzie: $h : U \rightarrow Y$.



Rys. 5.1. Ilustracja warunku stacjonarności układu

Przykład 5.2. Zdefiniujemy integrator jako układ opisany funkcją $y = F(u)$, przy czym:

$$(5.7) \quad y(t) = F(u)(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}$$

Układ ten jest liniowy i stacjonarny (rys. 5.1).

Następną omawianą tu właściwością układów będzie ciągłość. Rozpatrując tę właściwość, przyjmować będziemy, że przestrzenie sygnałów wejściowych i wyjściowych są unormowane. Układ jest *ciągły*, jeśli spełnia warunek:

$$(5.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n\right)$$

gdzie: (u_n) – ciąg funkcji, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ – granica w sensie normy przestrzeni sygnałów wejściowych, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$ – granica w sensie normy przestrzeni sygnałów wyjściowych. Własność ciągłości układu polega na tym, że małe (w sensie normy przestrzeni sygnałów wejściowych) zmiany wymuszenia powodują małe (w sensie normy przestrzeni sygnałów wyjściowych) zmiany odpowiedzi.

Przebadamy konsekwencje spełnienia warunku ciągłości przez układ liniowy. Niech istnieją granice:

$$(5.9) \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k F(u_k)$$

gdzie: α_k – rzeczywiste współczynniki. Wykorzystując zasadę superpozycji, otrzymujemy:

$$(5.10) \quad F\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k u_k\right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k F(u_k)$$

Zatem na podstawie (5.8) i (5.10) mamy:

$$(5.11) \quad F(u) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k u_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k F(u_k) = y$$

Otrzymany wynik można zapisać w postaci „warunku superpozycji” dla sum nieskończonych:

$$(5.12) \quad F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k F(u_k)$$