

3.3.3. Własności izochrom i izoklin oraz ważniejsze spostrzeżenia praktyczne

Ogólne informacje o obrazach izoklin i izochrom

Na rysunkach 3.1b i 3.1c podano oddzielnie obraz izochrom oraz zbiorczy obraz izoklin. Tymczasem, jak widać to ze wzoru (3.17), obraz obserwowany za analizatorem będzie zawierał tylko jedną izoklinę – tę, która odpowiada konkretnemu kątowi ustawienia filtrów ϕ – oraz wszystkie prążki izochrom, jakie dla danego obciążenia powstają. Wspomniana izoklina, jak również izochromy, tworzą czarne linie podczas badań w świetle monochromatycznym. Powstaje w związku z tym kwestia odróżnienia tej izokliny od prążków izochrom. Prostemu sposobu dostarcza tu znowu zależność (3.17), z której wynika, że obracanie układem sprzężonych i skrzyżowanych filtrów (lub obciążonym modelem) wywołuje zmianę kąta ϕ , a wobec tego i przemieszczanie się izokliny. Pole przesunięć w fazie $\delta(\mathbf{x})$ – proporcjonalne w każdym punkcie do $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ – nie ulega wówczas zmianie, a więc obraz izochrom będzie pozostawał nieruchomy.

Zauważamy równocześnie, że jeśli zmienić nieco wartość obciążenia – bez zmiany jego rozkładu i zmiany położenia filtrów – w modelu wystąpią tylko zmiany $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ i przemieszczeniu ulegną wyłącznie izochromy; widoczna aktualnie izoklina pozostanie w tym samym miejscu. Wzrost obciążenia spowoduje proporcjonalny wzrost różnic $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$, powstanie bogatszy obraz izochrom przy niezmiennym położeniu izokliny.

Dalszym naturalnym wnioskiem jest to, że najlepiej by było, gdyby w takcie rejestracji izoklin pole izochrom nie było wcale widoczne i odwrotnie: by nie były widoczne izokliny, gdy analizowane jest pole izochrom. Otrzymanie drugiego z tych efektów jest możliwe przy zastosowaniu polaryskopu do badań w świetle spolaryzowanym kołowo (por. podrozdział 3.5.1). Eliminację izochrom natomiast udaje się zrealizować tylko częściowo: podczas wyznaczania przebiegów izoklin dążymy do sytuacji, aby obraz izochrom był możliwie ubogi. Dlatego badania te przeprowadzamy przy relatywnie małych obciążeniach, rejestrujemy osobno izokliny dla kolejnych położań filtrów określonych kątem ϕ , a następnie wykonujemy zbiorczy rysunek izoklin, analogiczny do pokazanego na rysunku 3.1c.

Poszczególne izokliny rejestruje się zwykle zmieniając ϕ co $\frac{\pi}{36} \div \frac{\pi}{18}$ z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$, ponieważ dla parametrów izoklin, różniących się o $\frac{\pi}{2}$, otrzymuje się izokliny identyczne.

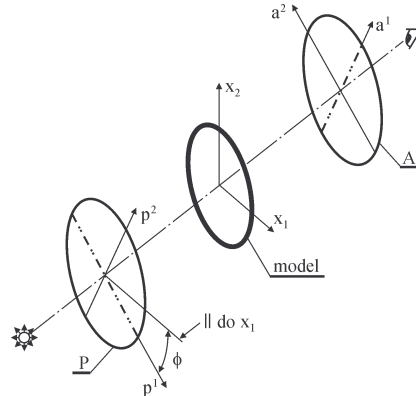
Kąt ϕ jest mierzony w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara od założonej dla konkretnego modelu osi odniesienia do aktualnego położenia osi optycznych obu filtrów. Osie te, w każdym punkcie izokliny, pokrywają się z kierunkami głównymi odkształcenia wzdłuż tej linii.

Ustawianie modelu w układzie polaryskopu – oś odniesienia parametrów izoklin

Jak już wspomniano oś odniesienia x_1 , od której odmierzone są parametry izoklin musi być związana z konkretnym modelem, ponieważ on właśnie jest przedmiotem badań i w nim należy wyznaczyć pole odkształcenia, określone bądź poprzez współrzędne $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$, bądź: $\varepsilon_1(\mathbf{x})$, $\varepsilon_2(\mathbf{x})$, $\phi(\mathbf{x})$.

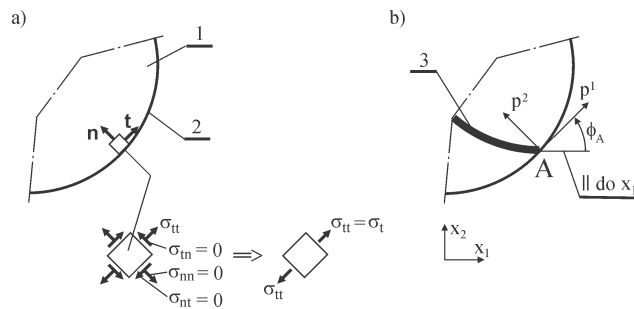
Wiadomo, że zarówno pole $\phi(\mathbf{x})$, jak i $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ zależą od przyjętego układu współrzędnych $\{x_1, x_2\}$ (rys. 3.9), wobec czego przed doświadczalnym wyznaczaniem izoklin $\phi(\mathbf{x}) = \text{const}$, układ ten musi być ustalony. Ustawienie układu filtrów polaryskopu polega na określeniu położenia układu współrzędnych $\{p^1, p^2\}$ (gdzie p^1, p^2 są równoległe do osi optycznych obu skrzyżowanych filtrów) względem układu $\{x_1, x_2\}$ związanego z modelem. Żądamy tutaj,

aby układ $\{p^1, p^2\}$ mógł być utworzony przez równoległe przesunięcie układu $\{x_1, x_2\}$, bowiem wtedy współrzędne ε_{ij} są w obydwu układach identyczne. Płaszczyzna modelu tarczy jest wówczas równoległa do płaszczyzn filtrów, a jedynym parametrem, który należy ustawić w układzie polaryskopu jest kąt ϕ obrotu układu $\{p^1, p^2\}$ względem $\{x_1, x_2\}$. Zrozumiałe, że dla poprawnego pomiaru izoklin przyjąć tu trzeba, że kąt ten jest równy zero.



Rys. 3.9

Ustawianie modelu w układzie polaryskopu liniowego



Rys. 3.10

Przykład analizy pola izoklin w obszarze przyległym do swobodnej krawędzi modelu

- wyznaczanie kierunków głównych naprężenia na swobodnej krawędzi modelu,
- sposób znajdowania parametru izokliny przecinającej brzeg swobodny
(1. badany model, 2. krawędź swobodna modelu, 3. izoklina ϕ_A)

W sytuacji, gdy położenie układu filtrów $\{p^1, p^2\}$ jest znane, to znaczy gdy filtry są już ustalone w oprawkach z naniesioną podziałką kątową, a oprawki zamocowane do sztywnej podstawy polaryskopu, model należy ustawić odpowiednio względem tej podstawy. Często są jednak także przypadki (z takim mamy m.in. do czynienia w badaniach opisanych w punkcie 3.4.3), gdy układ obciążający wraz z modelem stanowią oddzielne konstrukcje, a na oprawkach filtrów nie ma podziałek, które określałyby kąt obrotu ϕ ustalający położenie ich osi optycznych względem układu $\{x_1, x_2\}$. Wtedy, w celu ustawienia modelu,

korzystamy ze szczególnych własności pola izoklin, które wynikają z ogólnych właściwości kierunków głównych w płaskim stanie naprężenia, i które można przewidzieć nawet bez wykonywania obliczeń, czy badań uzupełniających. Z góry wiadomo na przykład, że:

- na nieobciążonej (swobodnej) krawędzi modelu jedno z naprężeń głównych jest równe zero, a kierunek drugiego – zgodny z kierunkiem stycznej do tej krawędzi (rys. 3.10a); parametr izokliny, która przechodzi przez punkt takiej krawędzi jest równy kątowi ϕ_A zawartemu pomiędzy styczną w tym punkcie i związaną z modelem osią odniesienia x_1 (rys. 3.10b);
- jeżeli model ma oś symetrii (symetria geometrii i własności fizycznych) i jest symetrycznie obciążony, to ta oś jest również osią symetrii pola odkształcenia (naprężenia, por. rys. 3.1); kierunki główne odkształcenia są wtedy od razu określone: jedna z izoklin musi się pokrywać z osią symetrii; w przypadku istnienia dwóch osi symetrii modelu (por. rys. 3.16a) otrzymuje się obraz izoklin o kształcie krzyża.

Podczas ustawiania polaryskopu można więc skorzystać z własności izoklin pewnego modelu pomocniczego, który ma na przykład dwie osie symetrii pola odkształcenia.

Na podstawie podanych spostrzeżeń można już łatwo obmyślić prosty sposób ustawiania polaryskopu, gdy osie filtrów są względem siebie dowolnie skręcone (brak sprzężenia), gdy nie naniesiono żadnych skal itd.

Obrazy izochrom i izoklin tworzące się przy zastosowaniu światła białego. Znajdowanie parametrów izochrom

Światło białe stanowi mieszaninę barw o różnych długościach fal. Gdy na skutek przesunięcia fazowego $\delta(\mathbf{x})$ jedna z nich – na przykład o długości λ_1 ($\lambda_1 = \delta(\mathbf{x})/m(\mathbf{x})$) – ulegnie wygaszeniu, to powstanie prążek izochromy będący mieszaniną barw pozostałych, którą określamy jako barwę dopełniającą.

Aby wyjaśnić powstawanie charakterystycznych dla izochrom sekwencji barw, które towarzyszą zmianom $\delta(\mathbf{x})$ przypomnijmy najpierw, że w świetle białym wyróżnia się jedenaście tzw. barw zasadniczych (por. [28]), odpowiadających długościom fal od $0,40\mu$ (dla fioletu) do $0,70\mu$ (dla czerwieni). Dla uproszczenia uwzględnijmy tylko cztery z nich: indygo (ciemnoniebieską) o długości fali $\lambda = (0,44-0,47)\mu$, zieloną ($\lambda = (0,49-0,56)\mu$), pomarańczową ($\lambda = (0,60-0,63)\mu$) i czerwoną ($\lambda = (0,63-0,70)\mu$). Wobec tego, że wymieniono je w porządku zgodnym z rosnącymi długościami fal, w miarę wzrostu $\delta(\mathbf{x})$ będą one kolejno wygaszane.

W przypadku wzrostu $\delta(\mathbf{x})$ w przedziale $(0,40\mu, 0,70\mu)$, odpowiadającym $m = 1$ (por. wzór (3.5)), w wyniku kolejnego wygaszania się wymienionych czterech barw zasadniczych, utworzą się barwy dopełniające: żółta, purpurowa, niebieska, zielononiebieska. Czarną izochromę otrzymamy tylko wtedy, kiedy $\delta(\mathbf{x}) = \lambda_1 m(\mathbf{x}) = 0$, to znaczy dla $m(\mathbf{x}) = 0$, a wobec tego także dla $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = 0$. W rezultacie, dla wzrastającego $\delta(\mathbf{x})$ z przedziału $(0, 0,70\mu)$, na obrazie pojawią się kolejno izochromy: czarna, 1. żółta, 1. purpurowa, 1. niebieska, 1. zielononiebieska. Zrozumiałe, że odwrotny porządek barw pojawi się gdy $\delta(\mathbf{x})$ (a więc i $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$) będzie malało.

W przypadku $m = 2$, to znaczy gdy dla założonego podzbioru czterech barw zasadniczych zachodzi $0,70\mu < \delta(\mathbf{x}) < 1,40\mu$, układ barw dopełniających nieco się zmieni. Przy wzrasta-

jącym $\delta(\mathbf{x})$ wystąpią izochromy: 2. żółta, 2. purpurowa, 2. niebieska, ale 2. zielononiebieskiej, analogicznej do powstającej dla $m = 1$, już nie otrzymamy. Analizując bowiem podane zakresy długości fal barw zasadniczych można dostrzec, że w teraz roważanym przedziale $\delta(\mathbf{x})$, mogą się równocześnie wygaszać aż dwie barwy: po raz trzeci indygo (co nastąpi przy $\delta(\mathbf{x}) \in 3(0,44-0,47)\mu = (1,32-1,41)\mu$) i po raz drugi – barwa czerwona (przy $\delta(\mathbf{x}) \in 2(0,63-0,70)\mu = (1,26-1,40)\mu$). Tak będzie, ponieważ przedziały zmienności $\delta(\mathbf{x})$, wyznaczone dla obu wymienionych barw, mają część wspólną: $(1,32-1,40)\mu$.

Z tych samych powodów jeszcze bardziej odmienne okazują się sekwencje barw dopełniających dla rzędów $m = 3$ i wyższych. Wobec tego jednak, że każda z barw może występować w różnych stopniach nasycenia i z różnym natężeniem, ich postrzeganie przez badacza może być bardzo zindywidualizowane. Dlatego przy szacunkowych ocenach rozkładów izochrom posługujemy się często różnymi odcieniami barw właściwymi sekwencji pierwotnej (dla $m = 1$), określanej zgrubnie przez kolory: żółty, czerwony (purpurowy), niebieski, zielony.

Identyfikacja rzędów izochrom staje się szczególnie prosta podczas badań obejmujących zakres liniowo-sprężysty, do którego się ograniczamy. W tym przypadku wzrost rzędu izochrom jest proporcjonalny do wzrostu obciążenia, a kierunki wzrostu (lub zmniejszania się) parametru m można określić na podstawie rozkładów uzyskanych najpierw dla małych obciążeń, przy których osiągnięta jest co najwyżej 2. izochroma niebieska.

W przypadku stosowania światła monochromatycznego, kierunki wzrostu lub zmniejszania się rzędów izochrom nie są widoczne i w celu określenia rzędu każdej z izochrom musimy się z reguły uciekać do śledzenia ich całego rozwoju, następującego w miarę wzrostu obciążenia.

W odczytywaniu parametrów izochrom pomocne mogą być również inne spostrzeżenia, na przykład:

- jak wynika ze wzorów (3.7) i (3.12), znając rząd konkretnej izochromy oraz elastooptyczną stałą modelową, możemy wzdłuż niej wyznaczyć $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ (lub $|\sigma_1 - \sigma_2|$);
- obok siebie mogą znajdować się tylko: albo izochromy sąsiednich, albo tych samych rzędów; w drugim przypadku pole $m(\mathbf{x})$ osiąga pomiędzy prążkami lokalne ekstremum; izochromy nie mogą się przecinać;
- ze wzorów (3.7) i (3.12) wynika także, iż wzdłuż dwóch sąsiednich izochrom o rzędach różniących się o 1, różnica odkształceń głównych (naprężeń głównych) jest równa wartości elastooptycznej stałej modelowej, odpowiednio: odkształceniowej ($|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{m+1} - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_m = C_\varepsilon$), lub naprężeniowej ($|\sigma_1 - \sigma_2|_{m+1} - |\sigma_1 - \sigma_2|_m = C_\sigma$).

Istotne dla interpretacji obrazów elastooptycznych są także efekty powstające wokół punktów osobliwych pola odkształcenia. W punkcie osobliwym zachodzi: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ($\sigma_1 = \sigma_2$), to znaczy, że w punkcie tym $m = 0$, zaś kąt odkształceń głównych ϕ (parametr izokliny) jest nieokreślony (jedno z kół Mohra degeneruje się do punktu). Są to zarówno punkty izolowane (zawsze czarne), jak również układające się w linie tworzące prążek (prążki) izochromy zerowej. Na przykład na obrazie izochrom pokazanym na rysunku 3.1b punkty osobliwe znajdujemy w swobodnych narożach (por. uzasadnienie za pomocą kostki elementarnej podane w podrozdziale 3.4.1) oraz w punkcie położonym w części centralnej modelu.

Od izochrom zerowych rozpoczynamy zawsze identyfikację rzędów pola izochrom.

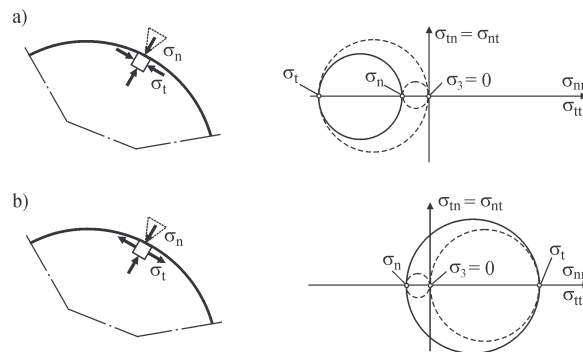
W punktach osobliwych powstają również interesujące efekty na obrazach izoklin. M.in. stają się one dobrze widoczne na zbiorczych rysunkach izoklin, gdzie z punktu osobliwego (por. rys. 3.1c) wychodzą wszystkie izokliny (o dowolnych parametrach ϕ). Uzasadniamy to tym, że w punkcie osobliwym wszystkie kierunki (w płaszczyźnie modelu) są głównymi kierunkami odkształcenia. Dalszym wnioskiem z powyższego jest, że izokliny mogą się przecinać tylko w punktach osobliwych. Zrozumiałe, że punkty osobliwe analizujemy posługując się równocześnie obrazami izochrom i izoklin (np. rys. 3.1b, 3.1c).

Interpretacja rozkładów izochrom na brzegach swobodnych

Jak stwierdzono w podrozdziale 3.1, z badań elastoptycznych otrzymuje się warstwie $m(\mathbf{x}) = \text{const}$ i $\phi(\mathbf{x}) = \text{const}$. Chcąc na tej podstawie wyznaczyć pole odkształcenia (lub naprężenia) musimy wykonać dość żmudne obliczenia, a często także dodatkowe pomiary (np. punktowe).

Zauważamy jednak, że obliczenia te nie są potrzebne, jeśli interesują nas tylko rozkłady naprężenia na brzegach swobodnych – z zewnątrz nieobciążonych. Mamy tu bowiem od razu (rys. 3.10a): $\sigma_{nt} = 0$, $\sigma_{nn} = 0$ oraz $|\sigma_{tt}| = |\sigma_t| = m(t) C_\sigma$. Aby znaleźć rozkład $|\sigma_t(t)|$ wzdłuż brzegu wystarczy zatem pomnożyć pomierzony rozkład $m(t)$ przez odpowiednią stałą modelową.

Pozostaje jeszcze sprawa określenia znaku $\sigma_t(t)$ wzdłuż badanego brzegu. Jest to dość proste i polega na lokalnym przykładaniu (prostopadle do krawędzi modelu i równomiernie na jego grubości) dodatkowego naprężenia ściskającego σ_n i równoczesnym obserwowaniu zachowania się izochrom wokół miejsca przyłożenia tego obciążenia. To dodatkowe obciążenie przykłada się zazwyczaj przy pomocy stępionego ostrza.



Rys. 3.11

Określanie znaku naprężenia σ_t w otoczeniu punktu położonego na brzegu nieobciążonym

- a) stan naprężenia po przyłożeniu dodatkowego naprężenia ściskającego σ_n w przypadku, gdy σ_t jest ujemne, b) stan naprężenia po przyłożeniu dodatkowego naprężenia ściskającego σ_n w przypadku, gdy σ_t jest dodatnie

Pomysł takiego postępowania uzasadniają analizy lokalnych stanów naprężenia w elementarnych kostkach, wyciętych myślowo z otoczenia badanego brzegu, pokazanych na rysunku 3.11. Na podstawie zaznaczonych tu liniami ciągłymi kół Mohra łatwo zauważyć,

że w przypadku a) rząd izochromy, po przyłożeniu naprężenia σ_n , maleje, natomiast w przypadku b) – rośnie. Efekt lokalnego wzrostu rzędu izochromy objawi się na obrazie powstaniem dodatkowych izochrom wyższych rzędów i nastąpi lokalne 'rozepchnięcie' pola izochrom. Z kolei w przypadku a) zaobserwujemy lokalne 'wessanie' tego pola.

Izochromy, a pole wyężenia

Obliczenia związane z wyznaczeniem pola odkształcenia (naprężenia) w badanym modelu na podstawie określonych doświadczalnie warstw $m(\mathbf{x}) = \text{const}$ i $\phi(\mathbf{x}) = \text{const}$ są na ogół żmudne. Dlatego w badaniach elastoptycznych często ograniczamy się do określenia rozkładów odkształcenia (naprężenia) wzdłuż brzegów oraz do jakościowych ocen pola izochrom i izoklin. Dla potrzeb technicznych badania takie są zwykle wystarczające, ponieważ na obrazie izochrom są dobrze widoczne m.in. ich zagęszczenia, sygnalizujące koncentracje odkształcenia. Ogólnie wiadomo również, iż najbardziej zagrożone obszary konstrukcji lokalizują się zazwyczaj na brzegach. Dysponując obrazem izochrom możemy więc wyprowadzić także ważne wnioski o powstającym w modelu polu wyężenia. Podstawą do takich ocen jest skojarzenie faktu, że obraz linii $|\sigma_1 - \sigma_2| = m C_\sigma = \text{const}$ może być utożsamiany z obrazem linii stałego wyężenia w sensie Treski. Podkreślamy jednak, że izochromy są liniami stałego wyężenia według Treski tylko w takich obszarach tarczy, gdzie naprężenia σ_1 i σ_2 mają różne znaki. Aby określić granice tych obszarów, należy przeprowadzić dodatkowe pomiary lub obliczenia, których omawianie pomijamy.

Podane wnioski warto przeanalizować posługując się konstrukcjami kół Mohra.

3.4. PRZYKŁADY BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

3.4.1. Wyznaczanie elastoptycznej stałej modelowej

Na podstawie wzoru (3.7) (lub (3.12)) zauważamy, że jeśli choćby w jednym tylko punkcie modelu tarczy znane są: różnica $|\epsilon_1 - \epsilon_2|$ (lub $|\sigma_1 - \sigma_2|$) i rząd izochromy m , to z tego wzoru można od razu obliczyć C_ϵ (lub C_σ). W praktyce prążki izochrom mają pewną szerokość, wobec czego rząd izochromy w konkretnym punkcie można określić jedynie w przybliżeniu. Dlatego, aby w miarę dokładnie wyznaczyć C_ϵ (lub C_σ), wartości te obliczamy na ogół przez uśrednienie wyników otrzymanych dla kilku punktów modelu.

Wartość m dla każdego prążka izochromy ukazującego się w modelu możemy tu określić kierując się informacjami przedstawionymi w podrozdziale 3.3. Zazwyczaj trudniej jest podać, jakie wartości $|\epsilon_1 - \epsilon_2|$ (lub $|\sigma_1 - \sigma_2|$) konkretnej izochromie odpowiadają. Dla ich określenia mamy dwie drogi. Pierwsza, niezbyt dogodna, to posłużenie się dodatkową techniką badawczą, na przykład pomiarem $\epsilon_1 = \epsilon_t$ ($\epsilon_2 = \epsilon_n = -\nu \epsilon_1$) przy pomocy tensometru oporowego naklejonego w otoczeniu punktu położonego na brzegu swobodnym modelu, przez który przechodzi konkretna izochroma. Droga druga, obliczeniowo-doświadczalna, wykorzystuje ewentualną możliwość określenia na podstawie wzorów $|\epsilon_1 - \epsilon_2|$ (lub $|\sigma_1 - \sigma_2|$) w pewnym punkcie modelu, poprzez który przechodzi izochroma o znanym rzędzie m .

Jednym z takich modeli, dla którego wzory te przyjmują szczególnie prostą postać, jest model belki zginanej 'czystym' momentem M i taki (rys. 3.12a) posłuży teraz do wyznaczenia interesujących nas stałych. Spostrzeżenie, iż rozkład naprężenia, charakterystyczny dla belek, zrealizuje się tu tylko w niektórych obszarach skomentujemy później.

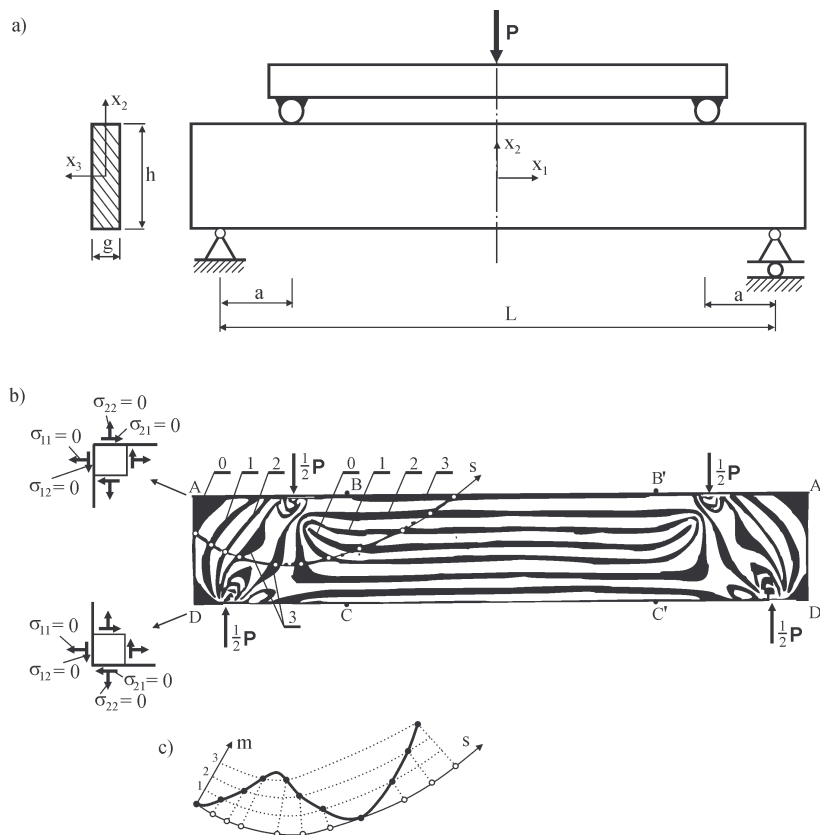
W obszarze 'czystego' zginania belki (ograniczonym polem prostokąta C, B, B', C' na rys. 3.12b) otrzymamy:

$$\sigma_{11} = \frac{M}{I_3} x_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad (\sigma_{i3} = 0 \text{ dla } i = 1, 2, 3),$$

a więc: $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2 = 0$, $|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma_1| = m C_\sigma$,

stąd:

$$(3.21) \quad C_\sigma = \frac{6 Pa}{mgh^2} x_2.$$



Rys. 3.12

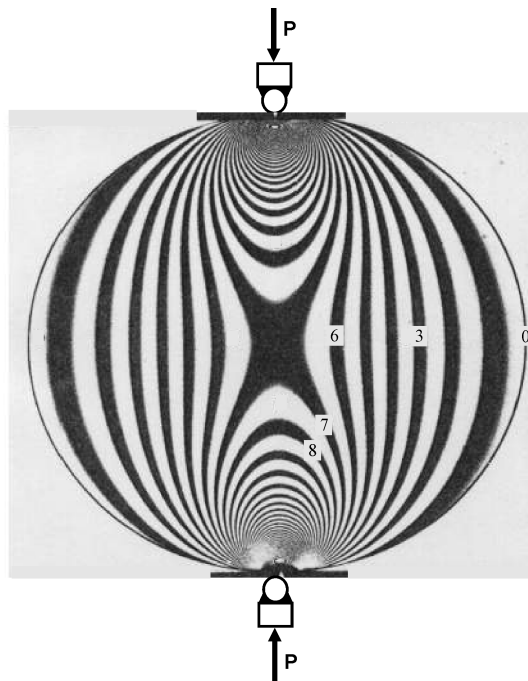
a) Schemat obciążenia i podparcia badanego modelu, b) prążki izochrom, c) rozkład wartości rzędów izochrom wzdłuż krzywej s, zaznaczonej na rysunku b

Wzór (3.21) pozwala sobie wyobrazić cały przebieg eksperymentu, którego celem jest wyznaczenie C_σ . Należy:

- zmierzyć parametry g , h i a badanego modelu (rys. 3.12a),

- obciążyć belkę znaną siłą P tak, aby było widocznych kilka prążków izochrom (np. trzy),
- określić współrzędne x_2 wspomnianych izochrom i dla każdej z nich, ze wzoru (3.21), obliczyć C_σ^k (np. $k = 1, 2, 3$); obliczyć C_σ jako średnią z C_σ^k ,
- z (3.13) wyznaczyć C_{σ_0} .

Wyznaczanie elastooptycznej stałej modelowej podanymi sposobami może być dokonywane także przy pomocy innych modeli, niekoniecznie belkowych. W każdym przypadku wymaga się tylko, aby z obliczeń (lub innych badań) dało się określić $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ (lub $|\sigma_1 - \sigma_2|$) w punkcie, przez który przechodzi izochroma o znanej wartości m . Jednym z takich modeli jest na przykład tarcza kołowa pokazana na rysunku 3.13, obciążona wzdłuż osi siłami ściskającymi P .



Rys. 3.13

Pole izochrom w tarczy kołowej

Napężenia w jej punkcie centralnym oblicza się z zależności:

$$\sigma_1 = \frac{-2P}{\pi g D}, \quad \sigma_2 = \frac{-6P}{\pi g D},$$

gdzie:

D – średnica tarczy,
 g – grubość.