1

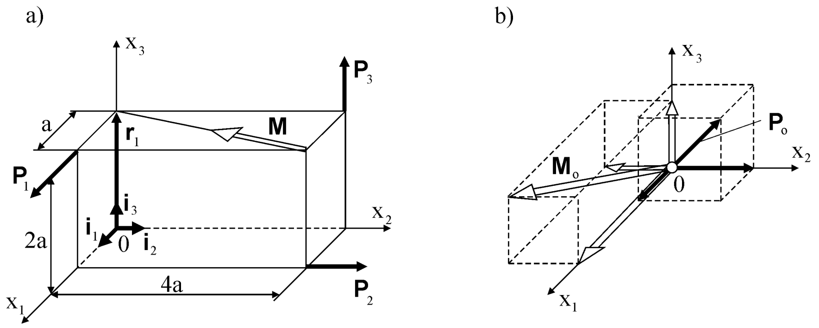
Redukcja układów sił działających na bryły sztywne

W zadaniach tego rozdziału wykorzystuje się zasady redukcji układów sił wykładane w ramach mechaniki ogólnej i powtórzone w tomie 1 podręcznika.

Zadanie 1

Zredukować układ sił przyłożonych do idealnie sztywnej kostki pokazanej na rysunku 1.1a. Jako punkt redukcji przyjąć początek układu współrzędnych. Założyć, że:

$$\text{mod } \mathbf{P}_1 = \text{P},\ \ \text{mod } \mathbf{P}_2 = 2\text{P},\ \ \text{mod } \mathbf{P}_3 = 2\text{P},\ \ \text{mod } \mathbf{M} = \sqrt{17}\ \text{Pa}^{1)}.$$



Rys. 1.1

Rozwiązanie

Na kostkę działają trzy siły skupione $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ oraz moment $\mathbf{M}$. Zredukowanie tego układu do punktu 0 oznacza, że należy znaleźć najprostszy układ zastępczy, przyłożony w punkcie 0, który będzie powodował taki sam ruch kostki, jak przyłożony do niej układ złożony $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{M}\}$.

Poprzenośmy zatem, zgodnie z zasadami redukcji, poszczególne siły do punktu 0. Przenosząc siłę $\mathbf{P}_1$ otrzymamy siłę $\mathbf{P}_1 = \mathbf{i}_1\text{P}$ przyłożoną do punktu 0 oraz moment wynikający z jej przeniesienia $\mathbf{X}_1$. Wektor przeniesienia siły $\mathbf{P}_1$ oznaczymy przez $\mathbf{r}_1$. Ma on początek w punkcie redukcji 0, a koniec w dowolnym punkcie położonym na kierunku działania siły $\mathbf{P}_1$. Obliczenia momentu $\mathbf{X}_1$ będą najprostsze, gdy założymy $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}_3\,2\text{a}$, to znaczy tak, jak pokazano na rysunku 1.1a. Moment ten będzie równy:

---

1) Analogiczne oznaczenia wektorów i ich modułów są stosowane w całej książce. Dlatego, gdy wielkość wektorowa jest przedstawiana czcionką niewytłuszczoną, to mamy na myśli jej moduł.

$$\text{(a)} \qquad \mathbf{X}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 0 & 0 & 2a \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 0 + \mathbf{i}_2 P\, 2a + \mathbf{i}_3 0 = \mathbf{i}_2 2Pa.$$

Postępując podobnie z pozostałymi siłami, w punkcie 0 otrzymamy:

– siłę $\mathbf{P}_2 = \mathbf{i}_2 2P$ oraz moment od jej przeniesienia $\mathbf{X}_2 = \mathbf{i}_3 2Pa$;
– siłę $\mathbf{P}_3 = \mathbf{i}_3 2P$ oraz moment od jej przeniesienia $\mathbf{X}_3 = \mathbf{i}_1 8Pa$;
– moment $\mathbf{M} = -\mathbf{i}_1 Pa - \mathbf{i}_2 4Pa$ od równoległego przeniesienia momentu skupionego $\mathbf{M}$.

Wobec powyższego, siła ogólna układu $\mathbf{P}_o$ wyniesie:

$$\mathbf{P}_o = \Sigma \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{i}_1 P + \mathbf{i}_2 2P + \mathbf{i}_3 2P,$$

natomiast moment ogólny $\mathbf{M}_O$ jest równy:

$$\mathbf{M}_o = \Sigma\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{P}_i + \mathbf{M} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 + \mathbf{M} = \mathbf{i}_1 7Pa - \mathbf{i}_2 2Pa + \mathbf{i}_3 2Pa.$$

Otrzymany układ $\{\mathbf{P}_o, \mathbf{M}_o\}$, przyłożony do punktu 0 (rys. 1.1b), zastępuje układ złożony $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{M}\}$.

Sprawdźmy jeszcze, czy moment $\mathbf{M}_o$ jest prostopadły do siły $\mathbf{P}_o$. Gdyby tak było, to układ sił działających na kostkę można by zastąpić tylko jedną siłą – siłą wypadkową. W tym celu obliczymy iloczyn skalarowy wektorów $\mathbf{P}_o$ i $\mathbf{M}_o$:

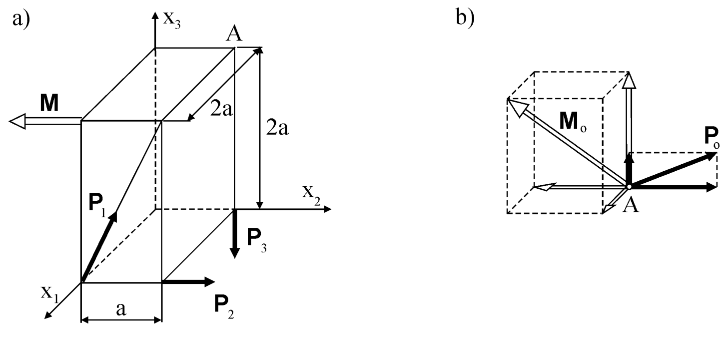
$$\mathbf{P}_o \cdot \mathbf{M}_o = P \cdot 7Pa + 2P \cdot (-2Pa) + 2P \cdot 2Pa = 7P^2 a \neq 0.$$

A zatem układu tego nie można zredukować do wypadkowej, lecz co najwyżej do skrętnika, to znaczy do siły ogólnej i momentu ogólnego w jej kierunku.

Zadanie 2

Zredukować do punktu A układ sił działających na sztywną kostkę pokazaną na rysunku 1.2a.

Przyjąć: mod $\mathbf{P}_1 = \sqrt{5}\,P$, mod $\mathbf{P}_2 = P$, mod $\mathbf{P}_3 = P$, mod $\mathbf{M} = Pa$.



Rys. 1.2

Rozwiązanie

Nie będziemy już teraz przedstawiali szczegółowego rozumowania tłumaczącego sens redukcji, lecz skupimy uwagę na praktycznym obliczeniu $\mathbf{P}_o$ i $\mathbf{M}_o$.

Wyznaczymy najpierw siłę ogólną $\mathbf{P}_o$. W tym celu przedstawimy poszczególne siły działające na kostkę poprzez współrzędne i wektory bazy:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{i}_2\sqrt{5}\,P\frac{1}{\sqrt{5}} + \mathbf{i}_3\sqrt{5}\,P\frac{2}{\sqrt{5}} = \mathbf{i}_2 P + \mathbf{i}_3 2P,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{i}_2 P,$$

$$\mathbf{P}_3 = -\,\mathbf{i}_3 P.$$

Siły te przenosimy do punktu A i obliczamy siłę ogólną, która – zgodnie z definicją – jest sumą wszystkich sił działających na układ. Siła ogólna $\mathbf{P}_o$ wynosi:

$$\mathbf{P}_o = \Sigma\,\mathbf{P}_i = \mathbf{i}_2 2P + \mathbf{i}_3 P.$$

Obliczmy teraz moment ogólny $\mathbf{M}_o$, będący sumą poszczególnych momentów działających na kostkę oraz momentów od przeniesienia sił do punktu redukcji A. Można to zrobić tak samo, jak w przypadku zadania poprzedniego, to znaczy dobierając promienie przeniesienia $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ (tu $\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$) i układając zależności analogiczne do oznaczonej tam przez (a), albo też obliczać składowe bezpośrednio wykorzystując fakt, że moment względem punktu (tu punktu redukcji) jest równy sumie momentów wokół przecinających w nim osi układu współrzędnych. Znak składowej momentu określa wówczas tzw. reguła śruby prawoskrętnej. W rozważanym zadaniu otrzymamy:

$$\mathbf{M} = -\,\mathbf{i}_2 P a,$$

$$\mathbf{X}_1 = -\,\mathbf{i}_2 4P a + \mathbf{i}_3 2P a,$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{i}_1 2P a + \mathbf{i}_3 2P a,$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{0}.$$

Moment ogólny będzie więc równy:

$$\mathbf{M}_o = \Sigma\,\mathbf{X}_i + \mathbf{M} = \mathbf{i}_1 2P a - \mathbf{i}_2 5P a + \mathbf{i}_3 4P a.$$

Sprawdźmy jeszcze, czy wyznaczony moment ogólny jest prostopadły do siły ogólnej. W tym celu obliczymy iloczyn skalarowy wektorów $\mathbf{P}_o$ i $\mathbf{M}_o$:

$$\mathbf{P}_o\cdot\ \mathbf{M}_o = 0\cdot 2P a + 2P\cdot(-5P a) + P\cdot 4P a = -\,6P^2 a \neq 0.$$

Wobec takiego wyniku można stwierdzić, że układ sił przyłożony do kostki z rysunku 1.2a redukuje się do skrętnika. Moment ogólny $\mathbf{M}_o$ i siłę ogólną $\mathbf{P}_o$ przedstawiono na rysunku 1.2b.

Zadanie 3

Zredukować do punktu A płaski układ sił działający na sztywną kostkę z rysunku 1.3a oraz znaleźć wypadkową tego układu, jeśli ona istnieje.

Przyjąć: mod $\mathbf{M}$ = 3Pa, mod $\mathbf{P}_1 = P\sqrt{2}$, mod $\mathbf{P}_2$ = 2P, mod $\mathbf{P}_3$ = P.

Rozwiązanie

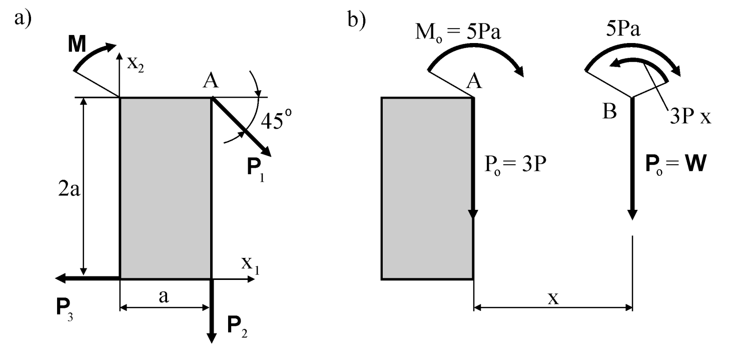
Zredukujmy najpierw podany układ sił do punktu A. Otrzymamy tam siłę ogólną:

$$\mathbf{P}_o = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{i}_1 P - \mathbf{i}_2 P - \mathbf{i}_2 2P - \mathbf{i}_1 P = -\,\mathbf{i}_2 3P.$$

Moment ogólny $\mathbf{M}_o$, który musi być przyłożony w punkcie A razem z siłą $\mathbf{P}_o$, jest sumą momentów skupionych przyłożonych do kostki oraz momentów wynikających z przeniesienia sił. Przeniesienia te są dokonywane w płaszczyźnie $\{x_1, x_2\}$, a więc momenty od przeniesień sił będą prostopadłe do tej płaszczyzny. Moduł momentu ogólnego wyniesie:

$$M_o = M + P_3 2a + P_2 0 = 3Pa + 2Pa = 5Pa.$$

Moment $\mathbf{M}_o$ jest prostopadły do siły $\mathbf{P}_o$, a więc otrzymany w punkcie A układ $\{\mathbf{P}_o, \mathbf{M}_o\}$ można redukować dalej i poszukiwać jego wypadkowej. Aby znaleźć prostą, na której siła $\mathbf{P}_o$ stanie się wypadkową $\mathbf{W}$ (rys. 1.3b), przesuwamy siłę $\mathbf{P}_o$ równolegle o pewien odcinek x w płaszczyźnie $\{x_1, x_2\}$.



Rys. 1.3

Przesunięcia możemy tu dokonać 'w lewo' lub 'w prawo' od punktu A. Akurat w tym przypadku odcinek x odmierzymy 'w prawo', ponieważ moment od przeniesienia siły $\mathbf{P}_o$ będzie miał wówczas zwrot przeciwny do momentu $\mathbf{M}_o$. Daje to szansę zredukowania obydwu tych momentów. Nastąpi to wówczas, gdy:

$$P_o \cdot x = M_o, \quad \text{skąd: } x = \frac{M_o}{P_o} = \frac{5Pa}{3P} = \frac{5}{3}a.$$

Tak więc rozważany układ sił redukuje się do wypadkowej $\mathbf{W}$, której moduł wynosi 3P i która działa na prostej przesuniętej 'w prawo' od punktu A o odległość $x = \frac{5}{3}a$.

Zadanie 4

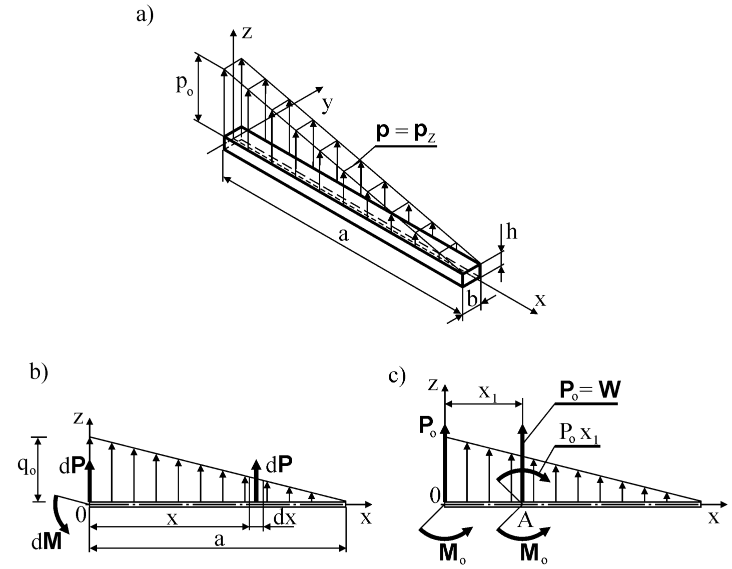
Idealnie sztywna belka o wymiarach b×h×a (rys. 1.4a) jest obciążona na górnej powierzchni ciśnieniem $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$, którego rozkład opisują funkcje:

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_o\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Zredukować ten układ obciążenia, przyjmując punkt redukcji w początku układu współrzędnych $\{x, y, z\}$. Założyć, że oś x łączy środki ciężkości przekrojów belki.

Rozwiązanie

Zastosujmy najpierw pewien prosty zabieg, który pozwoli na 'sprowadzenie' rozważanego zadania do jednowymiarowego. Widoczne jest, że składowa $\mathbf{p}_z$ (rys. 1.4a) nie zależy od współrzędnej y. Podczas dalszych analiz warto zatem posługiwać się nie ciśnieniem p_z o wymiarze N/mm^2, lecz wielkością $q = p_z\, b$, która ma wymiar N/mm i jest nazywana obciążeniem ciągłym o intensywności q lub, krótko, wydatkiem obciążenia. Wydatek q należy, co oczywiste, przykładać do belki w płaszczyźnie {x, z}, ponieważ jest ona płaszczyzną symetrii rozkładu ciśnienia $p_z(x, y)$.



Rys. 1.4

W rezultacie – w miejsce wyjściowego, przestrzennego układu obciążenia – można rozważać zadanie redukcji dla zastępczego układu płaskiego, pokazanego na rysunku 1.4b. Obciążenie belki stanowi teraz układ liniowo zmieniających się wydatków:

$$q(x) = p_o\, b\left(1 - \frac{x}{a}\right) = q_o\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

które należy zredukować do punktu 0.

Aby to uczynić, należy każdą z elementarnych sił d**P** ($dP = q(x)\,dx$) przenieść do punktu 0. Jest to przeniesienie równoległe, a więc w punkcie 0 przykłada się siłę d**P** oraz moment d**M** od jej przeniesienia (rys. 1.4b), równy:

$$dM = = x\, dP = x\, q(x)\, dx$$

i prostopadły do {x, z}.

Podobnie postępuje się ze wszystkimi siłami elementarnymi dP. Otrzymamy zatem:

$$P_o = \int_0^a q(x)\,dx = \int_0^a q_o\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\, q_o\, a$$

oraz:

$$M_o = \int_0^a x\, q(x)\,dx = \int_0^a x\, q_o\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{6}\, q_o\, a^2.$$

Moment **M**$_o$ jest prostopadły do siły **P**$_o$, co pozwala na dalszą redukcję układu i poszukiwanie jego wypadkowej. W tym celu dokonajmy równoległego przeniesienia **P**$_o$ i **M**$_o$ 'w prawo' o odległość x_1 (rys. 1.4c) do pewnego punktu A. Otrzymamy wtedy siłę ogólną **P**$_o$ oraz moment, którego moduł wyniesie: $M_o^A = M_o - P_o x_1$. W celu wyznaczenia położenia wypadkowej wystarczy jeszcze zażądać, aby moduł M_o^A był równy zero, skąd otrzymamy:

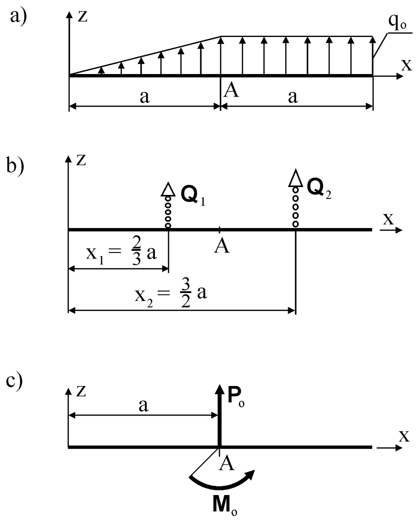
$$x_1 = \frac{M_o}{P_o} = \frac{\frac{1}{6} q_o a^2}{\frac{1}{2} q_o a} = \frac{1}{3} a.$$

Tak więc punkt, przez który przechodzi wypadkowa rozważanego obciążenia ciągłego, leży w odległości $\frac{1}{3}a$ od punktu 0.

Warto zwrócić uwagę, że jest to współrzędna środka ciężkości pola zawartego pod funkcją q(x) (rys. 1.4b). Właściwość ta uogólnia się na dowolne – ciągłe w przedziałach – rozkłady wydatków q(x).
Naturalnie, operowanie w tym zadaniu inżynierskim opisem układu współrzędnych {x, y, z} nie ma większego znaczenia. Równie dobrze można było używać oznaczeń $\{x_1, x_2, x_3\}$, jak w zadaniach poprzednich.

Zadanie 5

Zredukować do punktu A układ obciążeń ciągłych, działający na belkę pokazaną na rysunku 1.5a,.



Rys. 1.5

Rozwiązanie

Działanie obciążenia ciągłego w przedziale [0, a] można zastąpić jego wypadkową **Q**$_1$ ($Q_1 = \frac{1}{2} q_o a$), przyłożoną w punkcie $x_1 = \frac{2}{3}$ a (rys. 1.5b), natomiast rozkład q(x) w przedziale [a, 2a] – jego wypadkową **Q**$_2$ ($Q_2 = q_o a$), przyłożoną w punkcie $x_2 = \frac{3}{2}$ a. Redukując otrzymany w ten sposób układ sił $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ do punktu A (rys. 1.5c) wyznaczymy wartości modułów układu $\{\mathbf{P}_o, \mathbf{M}_o\}$:

$$P_o = Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2} q_o a,$$

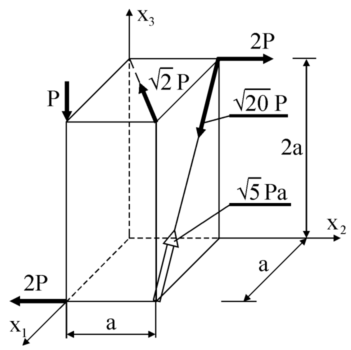
$$M_o = Q_2 \frac{1}{2} a - Q_1 \frac{1}{3} a = \frac{1}{2} q_o a^2 - \frac{1}{6} q_o a^2 = \frac{1}{3} q_o a^2.$$

Moment $\mathbf{M}_o$ jest prostopadły do $\mathbf{P}_o$, a więc rozważany układ ma wypadkową.

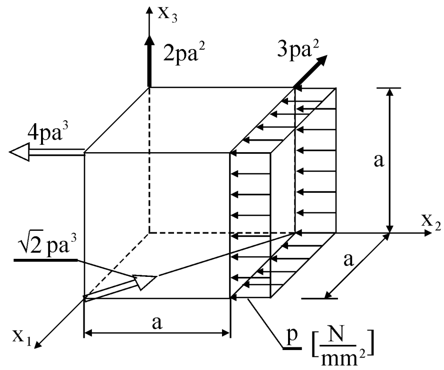
Siły $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ zostały tu przedstawione przy pomocy strzałek zbudowanych z okręgów i niewypełnionych grotów. Takie oznaczenia wypadkowych obciążeń ciągłych są przyjmowane w całym podręczniku.

Zadanie 6

Zredukować układy sił przyłożone do idealnie sztywnych kostek, pokazanych na rysunkach 1.6 i 1.7. W obu przypadkach jako punkt redukcji przyjąć początek układu współrzędnych.



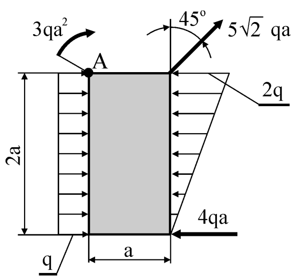
Rys. 1.6



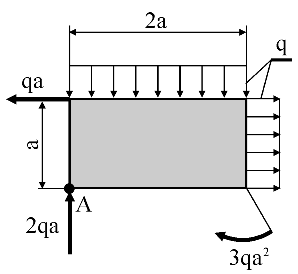
Rys. 1.7

Zadanie 7

Zredukować płaskie układy sił, przyłożone do sztywnych elementów tarczowych, pokazanych na rysunkach 1.8 i 1.9. Znaleźć wypadkowe tych układów, jeśli one istnieją.



Rys. 1.8



Rys. 1.9