

1. Naprężenia, odkształcenia i prędkości ruchu cząstek ośrodka

1.1. Wstęp

W tej części książki przedstawiono zwięzłe ogólne zasady teorii propagacji fal naprężeń i odkształceń w ośrodkach ciągłych, w tym głównie w ośrodkach wykazujących własności sprężyste. Jako wprowadzenie w Rozdziale 1 podano pojęcia i ogólne zależności dotyczące stanu naprężenia, stanu odkształcenia oraz prędkości odkształcenia. W Rozdziale 2 podano ogólną teorię propagacji fal w nieograniczonym izotropowym ośrodku sprężystym. Taki nieograniczony ośrodek jest pewną abstrakcją, ale ponieważ prędkości rozchodzenia się fal naprężeń i odkształceń zależą od kształtu obiektu, na przykład inna jest ich prędkość w smukłym pręcie, a inna w płaskim arkuszu materiału, to wyznaczone teoretyczne prędkości rozchodzenia się fal podłużnych i poprzecznych w nieograniczonym ośrodku stanowią wielkości porównawcze dla prędkości w obiektach skończonych. Ważne jest to, że są one wyprowadzone bez dodatkowych założeń, które z konieczności wprowadza się w przypadku obiektów ograniczonych zewnętrznymi powierzchniami. Przy analizie propagacji fal oprócz klasycznej metody równań falowych przedstawiono mniej znaną, a wnoszącą nowe elementy, metodę charakterystyk – linii, które mają wyraźną interpretację fizyczną. Ogólnie omówiono propagację fal płaskich, walcowych i kulistych. Omówiono też ważne zagadnienie osłabiania się fal w ośrodkach wykazujących własności lepkosprężyste oraz tak zwany opór akustyczny (impedancję) będący ważną cechą ośrodka zależną od jego gęstości i od prędkości rozchodzenia się w nim fali.

Rozdział 3 poświęcono omówieniu propagacji fal w obiektach ograniczonych powierzchniami zewnętrznymi, w tym w smukłym pręcie, oraz w obiektach ograniczonych dwiema równoległymi płaszczyznami. W tym drugim przypadku fale w nich określa się jako fale płytowe. W obu przypadkach obok teorii elementarnych opartych na upraszczających założeniach dotyczących obrazu ich deformacji podano ściślejsze teorie bez tego rodzaju uproszczeń. W przypadku smukłego pręta jest to teoria Pochhammera-Chree dla prętów o przekroju kołowym. W przypadku fal płytowych jest to rozwiązanie określane jako fale Lamba.

Dalej w tym rozdziale omówiono podstawy odbicia fal od swobodnych powierzchni obiektu. Podano przykłady eksperymentalnych wizualizacji takich odbić autorstwa Jerzego Lietza. Bardziej szczegółową analizę takich odbić w różnych praktycznie ważnych przypadkach zawiera część II tej książki autorstwa Zbigniewa Kotulskiego, a ich zastosowania w diagnostyce medycznej – część III autorstwa Andrzeja Nowickiego.

W Rozdziale 4 omówiono ważne pojęcie związków dyspersyjnych i związany z nim podział fal na fale dyspersyjne i niedyspersyjne. Omówiono też pojęcia prędkości fazowej i prędkości grupowej w przypadkach nakładania się fal dyspersyjnych o różnej długości fali.

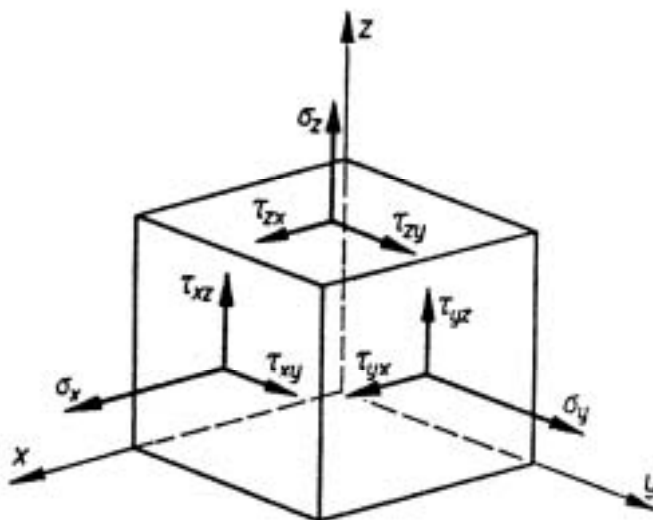
W Rozdziale 5 podano omówienie dwóch typów fal powierzchniowych, a mianowicie fal Rayleigha istotnych w niektórych problemach praktycznych, a w szczególności w sejsmologii, oraz fal powierzchniowych Love'a pojawiających się jako fale sejsmiczne w przypadku, gdy spoczywają na sobie warstwy o różnych własnościach.

Ważny w niektórych zastosowaniach technicznych problem propagacji fal w anizotropowych ośrodkach sprężystych omówiono w Rozdziale 6. W szczególności zwrócono uwagę na ortotropię akustyczną wywołaną w początkowo izotropowych metalach istniejącymi w nich naprężeniami reszkowymi. To zjawisko jest podstawą oryginalnej metody ultradźwiękowego badania naprężeń reszkowych w konstrukcjach.

W końcowych rozdziałach w zwięzły sposób przedstawiono podstawowe informacje dotyczące teorii propagacji fal ciśnienia w ośrodkach ciekłych i w powietrzu, a także zarys teorii propagacji fal powierzchniowych w wodzie.

1.2. Stan naprężenia

Przyjmijmy kartezjański układ współrzędnych x, y, z . Stan naprężenia w dowolnym punkcie rozpatrywanego ośrodka jest określony przez dziewięć składowych tensora naprężenia mierzonych jako odpowiednia siła przypadająca na jednostkę pola przekroju. Ich dodatnie kierunki pokazano na rys. I.1.



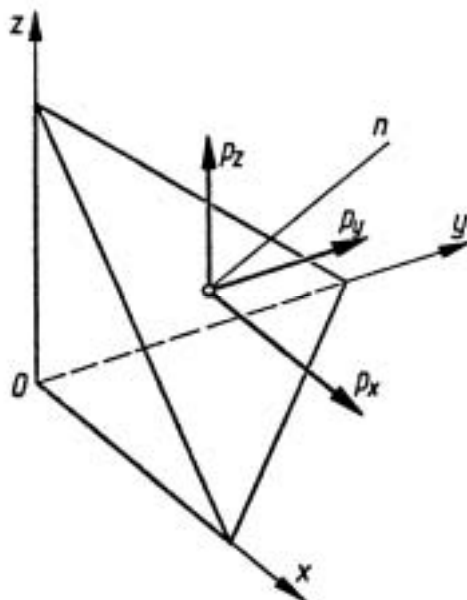
Rys. I.1. Dodatnie kierunki składowych tensora naprężenia.

Symbolem σ oznaczono składowe normalne, a symbolem τ składowe styczne. Warunki równowagi momentów względem osi przechodzących przez środek sześcianu dają równości $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Warunki te redukują liczbę niezależnych składowych tensora naprężenia do sześciu. Tworzą one symetryczny tensor

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

W każdym punkcie ośrodka można wyznaczyć trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, na których istnieją tylko naprężenia normalne. Naprężenia styczne są na tych płaszczyznach równe zero. Takie płaszczyzny nazywamy płaszczyznami głównymi, a istniejące na nich naprężenia normalne - naprężeniami głównymi. W celu wyznaczenia wartości tych naprężeń głównych rozpatrzmy stan równowagi elementarnego czworościanu (rys. I.2), którego trzy ściany tworzą płaszczyzny zawierające osie współrzędnych, a czwartą - płaszczyznę o normalnej n dowolnie nachylonej względem osi współrzędnych. Kosinusy kierunkowe tej normalnej oznaczmy przez a_x, a_y, a_z . Wypadkowe naprężenie p działające na tej ścianie można rozłożyć na trzy składowe p_x, p_y, p_z . Z warunków równowagi czworościanu wynikają zależności

$$\begin{aligned}
 p_x &= \sigma_x a_x + \tau_{yx} a_y + \tau_{zx} a_z \\
 p_y &= \tau_{xy} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{zy} a_z \\
 p_z &= \tau_{xz} a_x + \tau_{yz} a_y + \sigma_z a_z
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$



Rys. I.2. Naprężenia na dowolnie zorientowanej ścianie czworościanu.

Naprężenie normalne p_n równa się sumie rzutów tych składowych na kierunek n :

$$p_n = p_x a_x + p_y a_y + p_z a_z.$$

Naprężenie styczne p_t , jako drugą składową naprężenia wypadkowego p , obliczymy z zależności

$$p_t^2 = p^2 - p_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_n^2.$$

Na płaszczyźnie, na której ma działać poszukiwane naprężenie główne σ , wypadkowe naprężenie p powinno być skierowane wzdłuż normalnej n , ponieważ tylko w takim przypadku naprężenie styczne będzie równe zero. Zachodzi to więc, gdy

$$p_x = a_x \sigma, \quad p_y = a_y \sigma, \quad p_z = a_z \sigma.$$

Po podstawieniu tych zależności do równań (1.1) otrzymujemy układ równań względem kosinusów kierunkowych a_x, a_y, a_z normalnej do takiej płaszczyzny, na której istnieje naprężenie główne. Układ ten ma poniższą postać

$$\begin{aligned}
 a_x (\sigma_x - \sigma) + a_y \tau_{xy} + a_z \tau_{xz} &= 0 \\
 a_x \tau_{yx} + a_y (\sigma_y - \sigma) + a_z \tau_{yz} &= 0. \\
 a_x \tau_{zx} + a_y \tau_{zy} + a_z (\sigma_z - \sigma) &= 0
 \end{aligned}$$

Układ ten ma niezerowe rozwiązania tylko wtedy, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych a_x, a_y, a_z równa się zero

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{bmatrix} = 0.$$

Jest to równanie trzeciego stopnia względem σ

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (1.2)$$

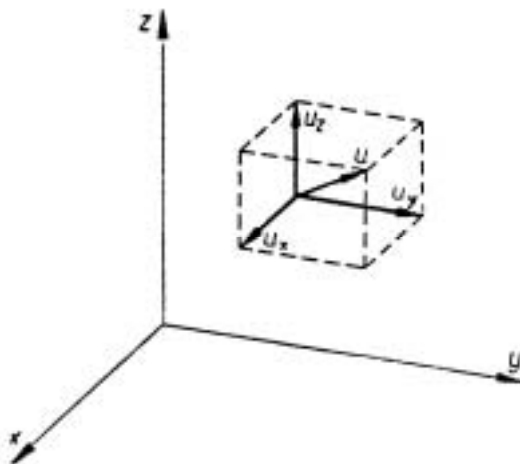
gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Równanie (1.2) ma zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste, określające wartości naprężeń głównych. Pierwiastki te nie mogą zależeć od orientacji przyjętego układu współrzędnych. Oznacza to, że współczynniki I_1, I_2, I_3 również nie mogą zależeć od orientacji układu osi x, y, z . Są one więc niezmiennikami stanu naprężenia.

1.3. Stan odkształcenia

W celu określenia zmiany kształtu elementu rozpatrywanego ciała porównamy położenie jego punktów materialnych przed i po odkształceniu.

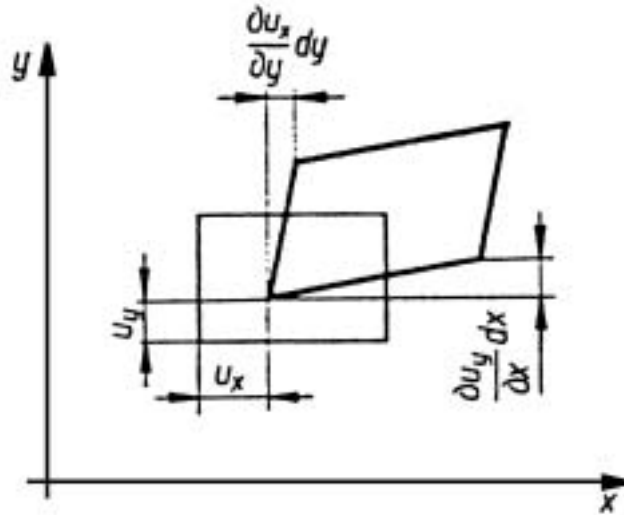


Rys. I.3. Wektor przemieszczenia punktu ośrodka po obciążeniu.

Założmy, że punkt P o początkowych współrzędnych x, y, z doznał w wyniku procesu odkształcenia małego przemieszczenia, określonego wektorem u o składowych u_x, u_y, u_z (rys. I.3). Zbadajmy zmianę długości krawędzi elementarnego prostokąta o początkowych krawędziach równych dx, dy, dz i równoległych do osi x, y, z . Długość dx

zmieniała się o wielkość $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$, a więc odkształcenie jednostkowe w kierunku x równa się $\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$. Podobnie otrzymujemy pozostałe odkształcenia w kierunkach y i z :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.3)$$



Rys. I.4. Przemieszczenie i odkształcenie elementarnego prostokąta.

Oprócz zmiany długości krawędzi zmieniają się również początkowo proste kąty pomiędzy krawędziami. Na przykład kąt prosty utworzony przez krawędzie dx i dy zmienia się o wielkość $\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$, zwaną kątem odkształcenia postaciowego. Na rys. I.4 pokazano rzut odkształconej ściany $dx dy$ na płaszczyznę xy . Podobnie otrzymujemy pozostałe kąty

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

przy czym $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Stan odkształcenia w danym punkcie można więc określić za pomocą tensora odkształcenia,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix},$$

w którym $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ równają się połowom odpowiednich kątów odkształcenia postaciowego.

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \quad (1.4)$$

W zapisie wskaźnikowym można związki (1.3) i (1.4) przedstawić jednym wzorem

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.5)$$

Tensor ε_{ij} jest symetryczny, co krótko zapisujemy jako $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Oprócz zmiany kształtu i objętości element ośrodka doznaje przy odkształcaniu również obrotów wokół odpowiednich osi współrzędnych. Te obroty są określone zależnościami

$$\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (1.6)$$

Jednostkową zmianę objętości odkształconego ośrodka wyraża wzór

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \equiv \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.7)$$

1.4. Prędkości odkształcenia

Prędkość płynięcia materiału w rozpatrywanym punkcie jest określona wektorem \mathbf{v} o składowych v_x, v_y, v_z równoległych odpowiednio do osi współrzędnych. Jeżeli przez δt oznaczymy krótki odcinek czasu, w którym można w przybliżeniu uważać prędkości za stałe, to przemieszczenia będą określone wyrażeniami

$$u_x = v_x \delta t, \quad u_y = v_y \delta t, \quad u_z = v_z \delta t.$$

Podobnie jak za pomocą wektora przemieszczenia \mathbf{u} określiliśmy odkształcenia, możemy teraz wyznaczyć składowe prędkości odkształcenia.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), & \dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), & \dot{\varepsilon}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Prędkość odkształcenia w danym punkcie jest więc określona za pomocą tensora prędkości odkształcenia

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$$

Prędkość zmiany jednostkowej objętości wyraża się wzorem

$$\dot{e} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.9)$$

Podamy tu jeszcze wyrażenia na składowe prędkości odkształcenia we współrzędnych walcowych r, ϑ, z mających zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień

osiowosymetrycznych. Oznaczmy przez v_r składową prędkości płynięcia w kierunku promieniowym; przez v_ϑ składową w kierunku obwodowym i przez v_z składową w kierunku osiowym. Wówczas składowe tensora prędkości odkształcenia wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\vartheta = \frac{1}{r} \left(v_r + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \right), \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - v_\vartheta \right) + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{\vartheta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{1.10}$$

1.5. Równania ruchu

W każdym punkcie rozpatrywanego ośrodka będącego w ruchu mamy wektor prędkości płynięcia \mathbf{v} oraz wektor przyspieszenia $d\mathbf{v}/dt$. Dla otrzymania równań ruchu należy wprowadzić siły bezwładności d'Alemberta. Wektor siły d'Alemberta odniesiony do jednostki objętości jest równy $-\rho d\mathbf{v}/dt$, gdzie ρ oznacza gęstość ośrodka. Sformułujemy najpierw znaczenie symbolu $d\mathbf{v}/dt$, za pomocą którego określiliśmy wektor przyspieszenia. Wektor prędkości \mathbf{v} jest funkcją współrzędnych x, y, z oraz czasu t , jeżeli rozpatrujemy najogólniejszy przypadek procesu niestacjonarnego. Prędkość jest więc funkcją czterech zmiennych $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. Funkcją tych samych zmiennych są więc i składowe wektora prędkości

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t).$$

Wyznamy dla przykładu składową przyspieszenia w kierunku osi x . Zmiana składowej v_x wektora prędkości zachodząca w przeciągu małego odcinka czasu δt jest równa

$$\delta v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} \delta t + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \delta z,$$

gdzie $\delta x, \delta y, \delta z$ są odpowiednimi składowymi przemieszczenia rozpatrywanej cząstki w czasie δt . Dzieliąc obydwie strony przez δt otrzymujemy

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t}.$$

Jeżeli okres czasu δt zdąża do zera, to zamiast ilorazów różnicowych $\delta/\delta t$ możemy napisać symbole różniczek. Wobec tego mamy

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Ale pochodne $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ są składowymi wektora prędkości v_x, v_y, v_z w badanym punkcie x, y, z w danej chwili t . Ostatecznie więc otrzymujemy przyspieszenie w kierunku osi x .

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.\tag{1.11a}$$

Podobnie otrzymamy przyspieszenia w kierunku osi y i z :

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}. \quad (1.11b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.11c)$$

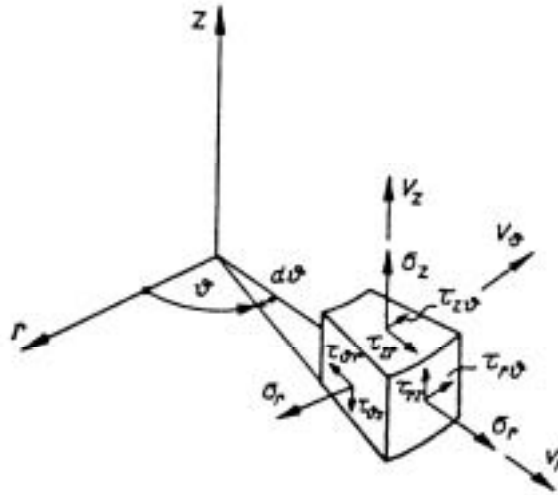
Rozpatrując stan równowagi elementarnego równoległoscianu pokazanego na rys. I.1 otrzymamy poniższe trzy równania ruchu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

W równaniach tych pominięto siły ciężaru własnego ośrodka, jako pomijalnie małe w rozpatrywanych dalej zagadnieniach propagacji fal sprężystych.

W zapisie wskaźnikowym równania (1.12) można przedstawić w zwartej formie

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.12a)$$



Rys. I.5. Naprężenia i prędkości we współrzędnych walcowych.

We współrzędnych walcowych r, ϑ, z (rys. I.5) równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} &= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\vartheta^2}{r} \right) \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} &= \rho \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_z \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).$$

W przypadku szczególnym, osiowej symetrii, mającym bardzo duże znaczenie praktyczne, gdy wszystkie składowe naprężenia i prędkości nie zależą od współrzędnej ϑ , a ponadto $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$ oraz $v_\vartheta = 0$, układ równań ruchu znacznie się upraszcza

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} &= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dla współrzędnych kulistych r, ϑ, φ ograniczymy się do podania równań ruchu dla przypadku symetrii sferycznej, gdy wszystkie składowe naprężenia i prędkości zależą tylko od promienia r . Ponadto mamy $v_\vartheta = v_\varphi = 0$, $\tau_{r\vartheta} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\vartheta\varphi} = 0$ oraz $\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi$. W takim przypadku ruch opisuje tylko jedno równanie

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\vartheta)}{r} = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right). \quad (1.15)$$

1. Fale przemieszczeń w ośrodkach warstwowych

1.1. Wstęp

Druga część tej książki zawiera opis zagadnienia badania przejścia harmonicznej sprężystej fali płaskiej (P lub SV , czyli spolaryzowanej w stosunku do kierunku propagacji podłużnie lub poprzecznie wertykalnie, por. Rozdział 5 w części I tej książki) przez nieskończoną płytę zbudowaną z wielu warstw materiału. Zakładamy, że kąt padania fali może być różny od zera. Oznacza to, że zagadnienie jest dwuwymiarowe; niezależnie od typu fali wymuszającej w ośrodku występują równocześnie fale podłużnie i poprzecznie spolaryzowane, zatem mamy do czynienia z propagacją fali $P+SV$. W szczególnym przypadku zerowego kąta padania zagadnienie sprowadza się do modelu jednowymiarowego. Wówczas propagację fali P (dla wymuszenia typu fali P) lub V (dla wymuszenia typu fali SV lub raczej V , ponieważ przy zerowym kącie padania nie ma znaczenia, czy polaryzacja poprzeczna jest horyzontalna, czy wertykalna). Jak widzimy, dla niezerowego kąta padania zagadnienie jest dużo bardziej skomplikowane, zarówno dla skończonej liczby warstw w płycie, jak i w sytuacji granicznej, gdy ich liczba dąży do nieskończoności. Płyta uwarstwiona zbudowana z jednorodnych i izotropowych warstw jest lokalnie (w obrębie każdej warstwy) izotropowa, jednak potraktowana jako całość jest anizotropowa. Ten fakt musi być odzwierciedlony w trakcie homogenizacji: materiał efektywny musi być anizotropowy (będąc, zgodnie z zasadami homogenizacji - jednorodnym). Widzimy, że w takim przypadku, formułując zagadnienie w sposób tradycyjny, to znaczy poszukując efektywnych stałych materiałowych poprzez uśrednienie wartości stałych przyjmowanych w podobszarach jednorodnych, otrzymujemy może nie tyle błędny, ile niepełny wynik. W ośrodku jednorodnym każdy ze składników płyty scharakteryzowany jest przez trzy stałe materiałowe: stałe Lamé λ i μ oraz gęstość ρ . Poszukiwanie jedynie efektywnych odpowiedników tych stałych nie daje pełnej charakterystyki ośrodka efektywnego jako przestrzeni, w której propaguje się fala sprężysta. Wynika z tego, że badanie efektywnych własności ośrodków sprężystych wymaga odmiennego, precyzyjnego sformułowania problemu i dokładnej analizy propagacji fali. Dla ułatwienia zapisu w tej części książki będziemy stosowali, tam gdzie to jest niezbędne, zapis wektorowy i macierzowy zarówno przemieszczeń lub prędkości, jak i operatorów. Stąd pojawienie się już w następnym punkcie symboli operatora dywergencji (div), gradientu (grad) lub operatora Laplacea (Δ), które w Części I zapisywane były w postaci odpowiednich pochodnych cząstkowych. Szczególnie istotne jest wprowadzenie pojęcia macierzy przejścia, bez którego wyniki przedstawiane w tej części książki byłyby całkowicie nieczytelne.

W kolejnych rozdziałach tej części książki podane są podstawowe fakty dotyczące propagacji fal sprężystych w ośrodku jednorodnym i na granicy półprzestrzeni jednorodnych. Podane są podstawowe zależności dla fal w przypadku napotkania przez nie granicy dwóch ośrodków sprężystych i warstwy sprężystej wykonanej z innego materiału.

W Rozdziale 2 przedstawiono zagadnienie propagacji sprężystych fal harmonicznych w ośrodku zbudowanym z wielu warstw otoczonych przez jednorodne półprzestrzenie. Przedstawiono sformułowanie problemu wykorzystania metody macierzy przejścia do opisu fal przechodzących i odbitych.

Rozdział 3 jest poświęcony szczególnemu przypadkowi problemu przedstawionego w Rozdziale 2, takiego, gdy kąt padania fali wymuszającej na pierwszą powierzchnię nieciągłości jest równy zeru.

Zagadnienie homogenizacji, to znaczy znalezienie takiego ośrodka jednorodnego, który najlepiej opisywałby analizowany ośrodek warstwowy, jest tematem Rozdziału 4.

Sformułowano ten problem homogenizacji dla zagadnienia falowego i obliczono efektywne stałe materiałowe opisujące ośrodek zhomogenizowany.

W Rozdziale 5 przedstawiono problem bilansu energii w ośrodku skokowo niejednorodnym, w którym przebiega stacjonarny proces falowy polegający na wielokrotnym odbijaniu fal na powierzchniach nieciągłości i przechodzenia ich przez takie powierzchnie.

W Rozdziale 6 przedstawiono szczególną klasę zagadnień falowych, jaką są impulsy falowe. Odróżnia je od fal harmonicznych niestacjonarny przebieg procesu, wymagający zastosowania innej metody matematycznej. Zaprezentowano najprostszą sytuację jednowymiarowych impulsów falowych, przebieg procesu w czasie i zbieżność do modelu zhomogenizowanego przy liczbie warstw w ośrodku skokowo niejednorodnym dążącej do nieskończoności (przy stosownych ograniczeniach).

W Rozdziale 7 z kolei przedstawiono bogatszy geometrycznie model dwuwymiarowych impulsów falowych w ośrodkach warstwowych, metodę obliczania kształtu impulsu przechodzącego i odbitego oraz zagadnienie homogenizacji w takim ośrodku.

Rozdział 8 to propozycja rozszerzenia metody macierzy przejścia, opracowanej w Rozdziałach 6 i 7 dla fal sprężystych, na przypadek fal termosprężystych.

1.2. Fale przemieszczeń na granicy ośrodków sprężystych

Rozważmy falę sprężystą w ośrodku jednorodnym i izotropowym. Niech $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = (U_1(\mathbf{r}, t), U_2(\mathbf{r}, t), U_3(\mathbf{r}, t))$ oznacza przemieszczenie ośrodka w punkcie $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Jej ewolucja (pod nieobecność wymuszeń zewnętrznych) jest opisana przez następujące równanie falowe:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} = \mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{U}, \quad (1.1)$$

gdzie

ρ - jest gęstością ośrodka,

λ i μ - są stałymi Lamé ośrodka.

Rozwiązanie równania (1.1) można rozłożyć na dwie części: \mathbf{U}_l i \mathbf{U}_t :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_l + \mathbf{U}_t, \quad (1.2)$$

w taki sposób, że

$$\text{rot } \mathbf{U}_l = 0, \quad \text{div } \mathbf{U}_t = 0. \quad (1.3)$$

Fala \mathbf{U}_l jest nazywana poprzeczną (poprzecznie spolaryzowaną), ponieważ przemieszczenia ośrodka są w niej prostopadłe do kierunku propagacji. Uzupełniająca fala \mathbf{U}_t jest nazywana podłużną (podłużnie spolaryzowaną), ponieważ przemieszczenia ośrodka są w niej równoległe do kierunku propagacji fali. Z równania (1.1) wynika, że w jednorodnym ośrodku izotropowym fale te nie oddziałują ze sobą; spełniają one następujące równania różniczkowe:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{U}_l = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{U}_t = 0, \quad (1.5)$$

gdzie

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (1.6)$$

$$c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1.7)$$

są prędkościami propagacji, odpowiednio, fali podłużnej i poprzecznej. Zakładając, że fale te są harmoniczne w czasie:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.8)$$

i

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (1.9)$$

otrzymujemy dwa następujące "zamrożone w czasie" równania dla fali podłużnej i poprzecznej:

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0, \quad (1.10)$$

$$\Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0, \quad (1.11)$$

gdzie

$$k_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad (1.12)$$

$$k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad (1.13)$$

są liczbami falowymi, odpowiednio, dla fali podłużnej i poprzecznej. Rozwiązania równań (1.10) i (1.11) mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = A \mathbf{n} \exp\{ik_l \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}\}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{r}) = C \mathbf{a} \times \mathbf{g} \exp\{ik_t \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}\}, \quad (1.15)$$

gdzie:

A (C) jest amplitudą fali podłużnej (odpowiednio: poprzecznej),

\mathbf{n} (\mathbf{g}) jest wektorem jednostkowym w kierunku propagacji fali podłużnej (poprzecznej),

\mathbf{a} jest wektorem jednostkowym prostopadłym do kierunku propagacji fali poprzecznej.

Przemieszczenia ośrodka wówczas opisane są przez rzeczywiste części wyrażeń (1.14) i (1.15) (w dalszych rozważaniach harmoniczny składnik czasowy pola falowego będzie konsekwentnie pomijany).

Powyższy prosty model komplikuje się, gdy fala sprężysta osiąga powierzchnię nieciągłości ośrodka (granice między dwoma różnymi jednorodnymi i izotropowymi

ośrodkami). W takim wypadku każda z propagujących się fal (podłużna i poprzeczna) częściowo odbija się i częściowo przechodzi przez powierzchnię nieciągłości generując zarówno falę podłużną jak i poprzeczną. W celu dokładnego opisanie tego zjawiska musimy znać kierunki propagacji i amplitudę każdej z tych fal.

Założmy, że płaszczyzna $x_1 = b = \text{const.}$ jest płaszczyzną połączenia dwóch półprzestrzeni wypełnionych materiałem sprężystym. W obszarze $x_1 < b$ znajduje się materiał, w którym prędkości falowe są równe: $c_l = c^1, c_t = v^1$; w obszarze $x_1 > b$ te wielkości są odpowiednio: $c_l = c^2, c_t = v^2$. Założmy, że w obszarze $x_1 < b$ propaguje się fala podłużna $A^1 \mathbf{n}^1 \exp\{ik_l^1 \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{r}\}$. Dochodząc do powierzchni nieciągłości generuje ona cztery nowe fale: odbitą podłużną $B^1 \mathbf{m}^1 \exp\{ik_l^1 \mathbf{m}^1 \cdot \mathbf{r}\}$ i odbitą poprzeczną $D^1 \mathbf{a} \times \mathbf{h}^1 \exp\{ik_t^1 \mathbf{h}^1 \cdot \mathbf{r}\}$, propagujące się w obszarze $x_1 < b$ oraz dwie przechodzące (załamane) - podłużną $A^2 \mathbf{n}^2 \exp\{ik_l^2 \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{r}\}$ i poprzeczną $C^2 \mathbf{a} \times \mathbf{g}^2 \exp\{ik_t^2 \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{r}\}$, w obszarze $x_1 > b$. (W powyższych wyrażeniach A^1, A^2, B^1, C^2, D^1 są amplitudami, $k_l^1, k_t^1, k_l^2, k_t^2$ liczbami falowymi, a $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{m}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{h}^1$ wektorami jednostkowymi w kierunku propagacji odpowiednich fal; wektor \mathbf{a} jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory \mathbf{h}^1 i \mathbf{N} , gdzie \mathbf{N} jest wektorem normalnym do powierzchni nieciągłości $x_1 = b$. W celu określenia wartości kątów wektorów kierunków posłużymy się prawem Snelliusa. Jeżeli ϑ^1 jest kątem pomiędzy wektorami \mathbf{n}^1 i \mathbf{N} , κ^1 jest kątem pomiędzy \mathbf{h}^1 i \mathbf{N} , ϑ^2 kątem pomiędzy \mathbf{n}^2 i \mathbf{N} , κ^2 kątem pomiędzy \mathbf{g}^2 i \mathbf{N} , to wówczas kąty te spełniają następujące związki:

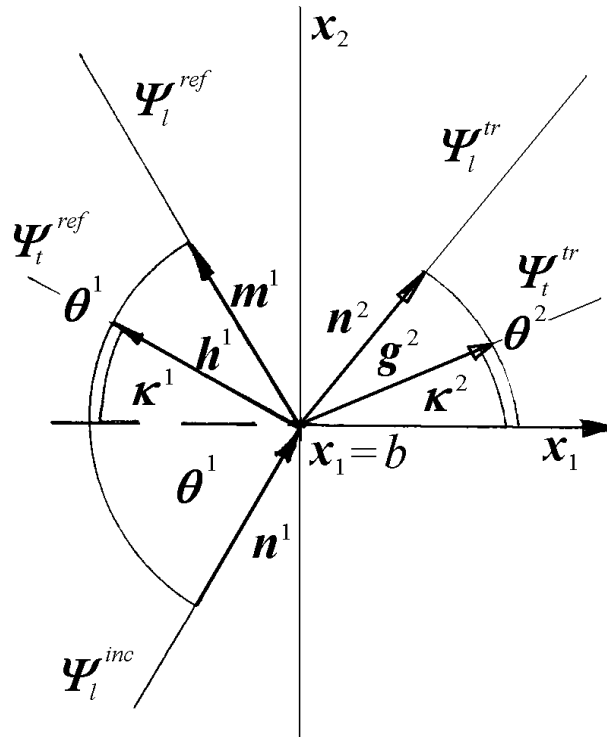
$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \kappa^1} = \frac{c^1}{v^1}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \vartheta^2} = \frac{c^1}{c^2}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \kappa^2} = \frac{c^1}{v^2}. \quad (1.18)$$

Kąt między wektorami \mathbf{m}^1 i \mathbf{N} jest równy ϑ^1 . Wyrażenia (1.16)-(1.18) jednoznacznie określają kierunki propagacji fali, o ile kąt ϑ^1 jest znany. Jeżeli fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana, to wówczas wyrażenia dla kątów fal generowanych są analogiczne, z tym, że kątem znanym jest κ^1 , a pozostałe kąty muszą być wyznaczone z wzorów (1.16)-(1.18).

Zastanówmy się teraz, jakie wartości mogą przyjmować kąty odbicia i przejścia fal podłużnych i poprzecznych w zależności od wartości kąta padania fali wymuszającej. Nadal będziemy zakładali, że fala wymuszająca jest falą podłużną i że jej kąt padania jest równy ϑ^1 . Ważną własnością fal w ośrodkach sprężystych wpływającą na wartości odpowiednich kątów jest to, że w ośrodku sprężystym prędkość fali podłużnej c jest większa niż prędkość fali poprzecznej v , czyli w sytuacji przedstawionej na rysunku II.1, mamy: $c^1 > v^1$ i $c^2 > v^2$. Z tego faktu i z równania (1.16) wynika, że $\vartheta^1 > \kappa^1$ i $\vartheta^2 > \kappa^2$, czyli kąt odbicia fali poprzecznej jest mniejszy, niż kąt odbicia fali podłużnej. Podobnie, kąt przejścia fali poprzecznej jest mniejszy niż kąt przejścia fali podłużnej.



Rys. II.1. Fala sprężysta na powierzchni nieciągłości.

Bardziej skomplikowana sytuacja występuje w przypadku porównania kąta padania fali wymuszającej i kątów przejścia obu rodzajów fal. Z równania (1.17) otrzymujemy dla przechodzącej fali podłużnej

$$\vartheta^2 = \arcsin\left(\frac{c^2}{c^1} \sin \vartheta^1\right). \quad (1.19)$$

Wiadomo, że argument funkcji arcus sinus musi się mieścić w przedziale od 0 do 1, czyli z (1.19) wynika, że powinno być:

$$0 \leq \frac{c^2}{c^1} \sin \vartheta^1 \leq 1. \quad (1.20)$$

Jeżeli teraz $c^1 > c^2$, to nierówność (1.20) nie wprowadza żadnych ograniczeń na kąt ϑ^1 : dla dowolnych wartości kąta padania możemy obliczyć kąt przejścia fali poprzecznej z równania (1.19). Jeżeli natomiast spełniony jest warunek przeciwny, czyli $c^1 < c^2$, to wówczas równanie (1.19) określa kąt przejścia jedynie dla ϑ^1 spełniającego warunek:

$$0 \leq \vartheta^1 \leq \arcsin\left(\frac{c^1}{c^2}\right) = \vartheta_{kr}^1. \quad (1.21)$$

Kąt ϑ_{kr}^1 , nazywany kątem krytycznym, jest maksymalnym kątem padania, przy którym możliwe jest przejście fali podłużnej z ośrodka o prędkości propagacji fali c^1 do ośrodka prędkości propagacji c^2 . Dla kątów większych następuje całkowite odbicie fali.

Analogicznie, dla fali przechodzącej poprzecznej wywołanej falą podłużną padającą pod kątem ϑ^1 , z równania (1.18) otrzymujemy równanie dla kąta przejścia [48]:

$$\kappa^2 = \arcsin\left(\frac{v^2}{c^1} \sin \vartheta^1\right). \quad (1.22)$$

W przypadku $c^1 < v^2$ obliczony kąt krytyczny jest większy niż dla fali podłużnej obliczony w (1.21),

$$0 \leq \vartheta^1 \leq \arcsin\left(\frac{c^1}{v^2}\right) = \vartheta_{kr}^1, \quad (1.23)$$

ponieważ $c^2 > v^2$.

Ogólnie, przy wymuszeniu podłużnym padającym na powierzchnię nieciągłości pod kątem ϑ^1 , w zależności od wzajemnych relacji prędkości fal w obu ośrodkach, możliwe są trzy sytuacje:

$$c^1 > c^2, \quad (1.24)$$

- nie ma kąta krytycznego,

$$c^2 > c^1 > v^2, \quad (1.25)$$

- jeden kąt krytyczny dla fali przechodzącej podłużnej,

$$v^2 > c^1, \quad (1.26)$$

- dwa kąty krytyczne: dla fali przechodzącej podłużnej i przechodzącej poprzecznej.

W przypadku wymuszenia poprzecznego, padającego na powierzchnię nieciągłości pod kątem κ^1 , również możliwe są trzy sytuacje:

$$v^1 > c^2 > v^2, \quad (1.27)$$

- jeden kąt krytyczny dla fali odbitej podłużnej,

$$c^2 > v^1 > v^2, \quad (1.28)$$

- dwa kąty krytyczne: dla fali odbitej podłużnej i przechodzącej podłużnej,

$$v^2 > v^1, \quad (1.29)$$

- trzy kąty krytyczne: dla fali odbitej podłużnej, przechodzącej podłużnej i przechodzącej poprzecznej.

Sytuacja przedstawiona w równaniach (1.24) – (1.29) opisuje jedynie możliwość propagacji fal odbitych i przechodzących (załamanych) w zależności od kąta padania fali wymuszającej podłużnej lub poprzecznej. W rzeczywistości dla różnych kombinacji własności ośrodka (prędkości fali podłużnej i poprzecznej) możliwe są także różne rodzaje fal powierzchniowych omówionych w części I tej książki, wzbudzanych przy wartościach kątów padania bliskich wartościom krytycznym. W szczególności dotyczy to opisanego dalej w rozdziale 1.3 problemu przejścia fali przez płytę sprężystą. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w monografii [1] i w pracach oryginalnych, np. [53].

Wartości amplitud mogą być uzyskane z warunków ciągłości, które musi spełniać pole falowe $\mathbf{u}(x)$ na powierzchni połączenia materiałów. Wiadomo, że wewnątrz każdego z jednorodnych i izotropowych materiałów pole falowe, jako suma funkcji wykładniczych, jest

funkcją ciągłą; na powierzchni nieciągłości ciągłe musi być przemieszczenie ośrodka $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r$ i naprężenie normalne $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$:

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{N}_j, \quad (1.30)$$

gdzie

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.31)$$

Wyrażenia dla amplitud fal w szczególnych rozważanych przypadkach będą przedstawione w następnych rozdziałach.

1.3. Przejście fali przez warstwę sprężystą

Rozważmy teraz problem przejścia płaskiej fali harmoniczej przez warstwę sprężystą. Załóżmy, że warstwa rozciąga się w obszarze od $x_1 = 0$ do $x_1 = d$ i jest równoległa do osi x_2 i x_3 . Zatem płaszczyzny $x_1 = 0$ i $x_1 = d$ są płaszczyznami połączenia półprzestrzeni wypełnionych materiałem sprężystym z rozpatrywaną warstwą. W obszarze $x_1 < 0$ i $x_1 > d$ znajduje się materiał, w którym prędkości falowe są równe: $c_l = c^0, c_t = v^0$; w obszarze $0 < x_1 < d$ (czyli w warstwie) te wielkości są odpowiednio równe: $c_l = c^1, c_t = v^1$. Załóżmy, że w obszarze $x_1 < 0$ propaguje się płaska fala podłużna $A^0 \mathbf{n}^0 \exp\{ik_l^0 \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{r}\}$, por. [40] (tak dobieramy układ osi x_2 i x_3 , żeby problem odbicia nie zależał od zmiennej x_3 ; od tej chwili pomijamy tę zmienną w naszych rozważaniach). Dochodząc do powierzchni nieciągłości generuje ona cztery nowe fale: odbitą podłużną $B^0 \mathbf{m}^0 \exp\{ik_l^0 \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{r}\}$ i odbitą poprzeczną $D^0 \mathbf{a} \times \mathbf{h}^0 \exp\{ik_t^0 \mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{r}\}$, propagujące się w obszarze $x_1 < 0$ oraz dwie przechodzące: podłużną $A^1 \mathbf{n}^1 \exp\{ik_l^1 \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{r}\}$ i poprzeczną $C^1 \mathbf{a} \times \mathbf{g}^1 \exp\{ik_t^1 \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{r}\}$, w obszarze $0 < x_1 < d$. (W powyższych wyrażeniach A^0, A^1, B^0, C^1, D^0 są amplitudami, $k_l^0, k_t^0, k_l^1, k_t^1$ liczbami falowymi, a $\mathbf{n}^0, \mathbf{n}^1, \mathbf{m}^0, \mathbf{g}^1, \mathbf{h}^0$ wektorami jednostkowymi w kierunku propagacji odpowiednich fal; wektor \mathbf{a} jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory \mathbf{h}^0 i \mathbf{N} , gdzie \mathbf{N} jest wektorem normalnym do powierzchni nieciągłości $x_1 = 0$ (i także $x_1 = d$). W celu określenia wartości kątów wektorów kierunków posłużymy się, tak jak w rozdziale 1.2, prawem Snelliusa. Jeżeli ϑ^0 jest kątem pomiędzy wektorami \mathbf{n}^0 i \mathbf{N} , κ^0 jest kątem pomiędzy \mathbf{h}^0 i \mathbf{N} , ϑ^1 kątem pomiędzy \mathbf{n}^1 i \mathbf{N} , κ^1 kątem pomiędzy \mathbf{g}^1 i \mathbf{N} , to wówczas kąty te spełniają następujące związki:

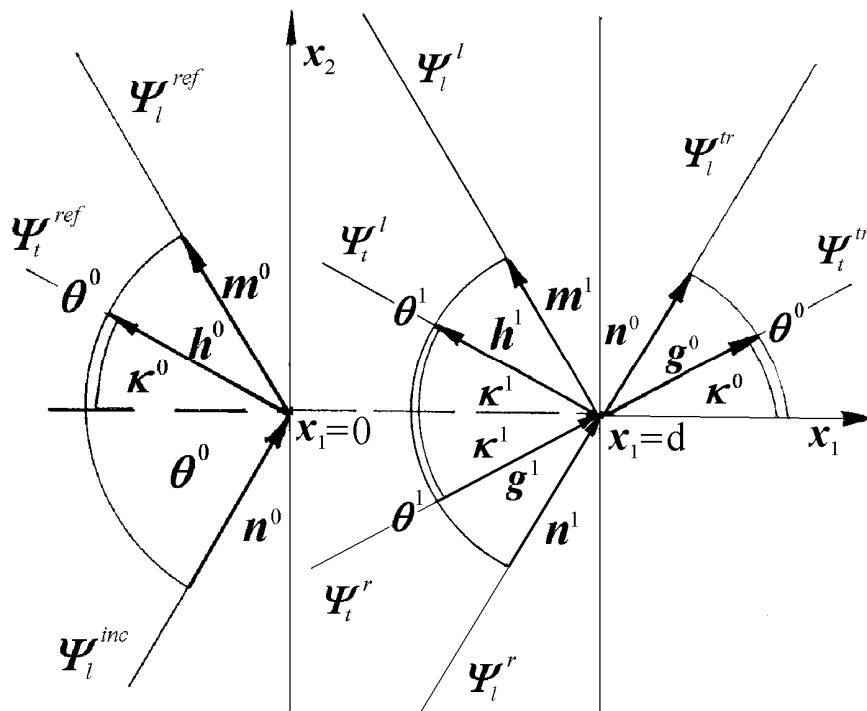
$$\frac{\sin \vartheta^0}{\sin \kappa^0} = \frac{c^0}{v^0}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\sin \vartheta^0}{\sin \vartheta^1} = \frac{c^0}{c^1}, \quad (1.33)$$

$$\frac{\sin \vartheta^0}{\sin \kappa^1} = \frac{c^0}{v^1}. \quad (1.34)$$

Kąt między wektorami \mathbf{m}^0 i \mathbf{N} jest równy ϑ^0 , zgodnie z zasadą, że kąt padania jest równy kątowi odbicia. Wyrażenia (1.32)-(1.34) jednoznacznie określają kierunki propagacji fali, o ile kąt padania fali wymuszającej ϑ^0 jest znany. Zauważmy, że jeżeli fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana, to wówczas wyrażenia dla kątów fal generowanych są analogiczne, z tym, że kątem znanym jest κ^0 , a pozostałe kąty muszą być wyznaczone z wzorów (1.32)-(1.34).

Jak widać, tak sformułowany problem przejścia przez powierzchnię nieciągłości nie różni się od problemu z rozdziału 1.2. Jednak w przypadku przejścia fali przez warstwę należy uwzględnić jeszcze dodatkowo nieciągłość materiału sprężystego na płaszczyźnie $x_1 = d$. Mamy teraz dwie fale padające na tę płaszczyznę (niezależnie od tego, jakie było wymuszenie, podłużne czy poprzeczne). Zatem na płaszczyznę $x_1 = d$ padają fale przechodzące przez płaszczyznę $x_1 = 0$ do wnętrza warstwy: podłużna $A^1 \mathbf{n}^1 \exp\{ik_1^1 \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{r}\}$ i poprzeczna $C^1 \mathbf{a} \times \mathbf{g}^1 \exp\{ik_1^1 \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{r}\}$. Każda z nich generuje fale obu typów, odbite i przechodzące przez powierzchnię nieciągłości. Sytuację tę przedstawiono na rysunku II.2.



Rys. II.2. Fale w warstwie sprężystej.

Rozumując w ten sposób dalej, należałoby teraz uwzględnić fale wygenerowane na powierzchni nieciągłości $x_1 = 0$ przez fale odbite od powierzchni $x_1 = d$, a następnie wszystkie kolejne odbicia i przejścia fal generowanych w kolejnych krokach. Zobaczmy jednak, jak wyglądają kierunki propagacji tych fal. Stosując prawo Snelliusa do wymuszenia podłużnego $A^1 \mathbf{n}^1 \exp\{ik_1^1 \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{r}\}$ padającego na powierzchnię $x_1 = d$ otrzymujemy (przez ϑ^{fin} i κ^{fin} oznaczamy kąty wyjścia fali podłużnej i poprzecznej z warstwy):

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \kappa^1} = \frac{c^1}{v^1}, \quad (1.35)$$

skąd uzyskujemy kąt odbicia fali poprzecznej,

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \vartheta^{fin}} = \frac{c^1}{c^0}, \quad (1.36)$$

czyli mamy $\vartheta^{fin} = \vartheta^0$, por. (1.33),

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \kappa^{fin}} = \frac{c^1}{v^0}, \quad (1.37)$$

a zatem z (1.34) uzyskujemy, że $\kappa^{fin} = \kappa^0$.

Podobnie dla fali wymuszającej poprzecznie spolaryzowanej $C^1 \mathbf{a} \times \mathbf{g}^1 \exp\{ik^1 \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{r}\}$:

$$\frac{\sin \kappa^1}{\sin \vartheta^1} = \frac{v^1}{c^1}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\sin \kappa^1}{\sin \kappa^{fin}} = \frac{v^1}{v^0}, \quad (1.39)$$

co z (1.34) i (1.32) pokazuje, iż również dla tej fali wymuszającej $\kappa^{fin} = \kappa^0$,

$$\frac{\sin \kappa^1}{\sin \vartheta^{fin}} = \frac{v^1}{c^0}, \quad (1.40)$$

a po uwzględnieniu (1.34) i (1.33) mamy, że $\vartheta^{fin} = \vartheta^0$.

Dalsze podobne rozważania pokazują, że ośrodku przedstawionym na rysunku II.2 (warstwa sprężysta otoczona dwiema półprzestrzeniami sprężystymi), wszystkie fale odbite i przechodzące propagują się w kierunku tych samych wektorów, niezależnie od tego, w wyniku którego kolejnego odbicia powstały. Reasumując, w stanie ustalonym, to znaczy wtedy, gdy cała przestrzeń poddana jest falowaniu harmonicznemu, mamy następujące fale. W półprzestrzeni $x_1 < 0$ falę padającą podłużną, propagującą się w kierunku \mathbf{n}^0 wyznaczonym przez kąt ϑ^0 , odbitą podłużną wzdłuż \mathbf{m}^0 , z kątem ϑ^0 symetrycznym do kąta padania i odbitą poprzeczną wzdłuż \mathbf{h}^0 , pod kątem κ^0 . W obszarze warstwy $0 < x_1 < d$ mamy cztery fale, dwie propagujące się w prawo (czyli „przechodzące”), o wektorze kierunku i kącie, odpowiednio, dla fali podłużnej: \mathbf{n}^1 , ϑ^1 i dla fali poprzecznej: \mathbf{g}^1 , κ^1 , i dwie propagujące się w lewo (czyli „odbite”) z parametrami dla fali podłużnej \mathbf{m}^1 , ϑ^1 i dla fali poprzecznej: \mathbf{h}^1 , κ^1 . W półprzestrzeni za warstwą $x_1 > d$ mamy dwie fale przechodzące, podłużną wzdłuż wektora \mathbf{n}^0 o kącie ϑ^0 i poprzeczną wzdłuż \mathbf{g}^0 o kącie κ^0 . Całą sytuację przedstawia rysunek II.2, gdzie wszystkie nieznane kąty należy obliczyć z wzorów (1.32) – (1.40).

Podobnie jak w przypadku granicy dwóch półprzestrzeni, wartości amplitud pola falowego w każdym z obszarów mogą być uzyskane z warunków ciągłości, które musi spełniać pole falowe $\mathbf{u}(x)$ na powierzchni połączenia materiałów. W tym wypadku warunki te muszą być spełnione na płaszczyznach nieciągłości $x_1 = 0$ i $x_1 = d$, gdzie d jest grubością warstwy. Również i w tym przypadku muszą być ciągłe przemieszczenie ośrodka $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r$ i naprężenie normalne $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, por. (1.19) i (1.20). Wyrażenia dla amplitud fal w tym

przypadku będą szczególnym przypadkiem ogólnego wyniku przedstawionego w następnym rozdziale, por. (2.75) - (2.78).

1. Rozchodzenie się fal ultradźwiękowych w tkankach

1.1. Wprowadzenie

Falami ultradźwiękowymi nazywamy zaburzenia stanu ośrodka, rozchodzące się w nim ze skończoną prędkością i niosące ze sobą energię.

W zależności od rodzaju ośrodka mamy do czynienia z różnymi rodzajami zaburzeń jego stanu: w gazach są to zaburzenia gęstości, w cieczech gęstości i kształtu powierzchni swobodnej, natomiast w ciałach stałych - gęstości lub kształtu.

Zakres drgań ultradźwiękowych obejmuje bardzo szerokie pasmo częstotliwości, od bardzo małych poniżej kilkunastu drgań na sekundę aż do miliardów drgań na sekundę. Drgania o częstotliwościach od 16 do 16000 drgań na sekundę (16 Hz - 16 kHz) są słyszalne dla ucha ludzkiego i nazywane są dźwiękami lub słyszalnymi falami akustycznymi. Bardzo wolne drgania leżące poniżej zakresu fal słyszalnych nazywamy infradźwiękami. Należą do nich, między innymi, wstrząsy sejsmiczne wywołane trzęsieniami ziemi. Powyżej górnej granicy słyszalności, a więc powyżej 16000 Hz, rozpoczyna się zakres ultradźwięków. Drgania w zakresie od kilkudziesięciu do kilkuset tysięcy drgań na sekundę znajdują głównie zastosowanie w hydrolokacji i technikach ultradźwiękowych dużej mocy. Zakres od 1 do 10 milionów (1 MHz do 10 MHz) drgań na sekundę obejmuje nieniszczące badania materiałów i ultradźwiękową diagnostykę medyczną. Wraz z rozwojem nowych bardzo skutecznych źródeł drgań ultradźwiękowych oraz coraz to czulszych technologii elektronicznych, granica ta zwolna przesuwa się w kierunku wyższych częstotliwości, otwierając nowe obszary ultrasonograficznej diagnostyki medycznej. Już obecnie coraz rzadziej spotyka się urządzenia diagnostyczne o częstotliwości poniżej 2 MHz, natomiast rodzi się nowy obszar badań tkanek w zakresie częstotliwości dochodzących do 100 MHz. Powyżej, aż do około 3 miliardów drgań na sekundę (3 GHz), znajduje się zakres ultradźwięków stosowanych do badania własności fizyko-chemicznych oraz obrazowania subtelnej budowy materiałów metodami mikroskopii akustycznej.

Część III książki poświęcona jest omówieniu ruchu falowego w aspekcie ultradźwięków stosowanych w medycznej diagnostyce obrazowej. W Rozdziale 1 przybliżone zastana takie pojęcia jak; energia drgań, propagacja fal w ośrodkach jednorodnych, impedancja akustyczna i odbicie fal na granicy różnych tkanek.

W ostatnim Rozdziale 2 omówimy podstawy promieniowania przetworników ultradźwiękowych

1.2. Oscylator mechaniczny

Najprostszym rodzajem fali sprężystej jest fala sinusoidalna, wywołana okresowo powtarzającymi się drganiami cząstek wokół swoich położenia równowagi. Przykładem takiego ruchu jest drganie sprężyny o podatności K obciążonej masą m .

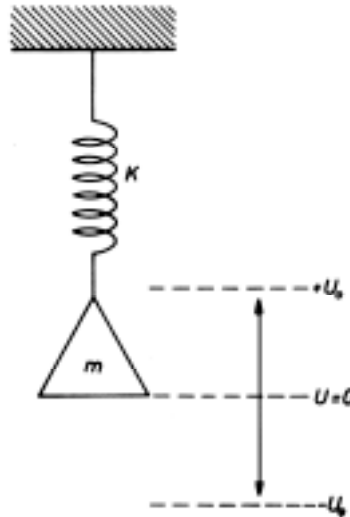
Sprężynę znajdującą się początkowo w stanie równowagi, pobudzamy do drgań naciągając ją, a więc dostarczając układowi pewnej porcji energii. Jeżeli pominiemy straty, to masa m wprawiona zostanie w nietłumione swobodne drgania o wychyleniu $\pm U_0$ wokół położenia równowagi $U = 0$. Układ wykonuje jedno pełne drganie, od punktu $U = 0$ do góry, w dół i z powrotem do $U = 0$ w czasie T zwanym okresem drgań. Liczbę drgań wykonanych w ciągu sekundy nazywamy częstotliwością drgań f . Między okresem i częstotliwością zachodzi zależność

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.1)$$

Jednostką częstotliwości jest 1 Hz (herc).

Obok częstotliwości używa się także wielkości $\omega = 2\pi f$ zwanej pulsacją lub częstotliwością kołową. Pulsacja określa kąt φ lub łuk koła zakreślonego przez materialny punkt układu w jednostce czasu.

Jednostką pulsacji jest radian/s. Kąt pełny 360° odpowiada 2π radianów w mierze łukowej.



Rys. III.1. Drganie masy zawieszonyj na sprężynie jest prostym przykładem oscylatora harmonicznego.

Dla idealnej sprężyny przeciwdziałająca rozciąganiu siła jest proporcjonalna do wielkości rozciągnięcia u i może być zapisana w postaci iloczynu $-Ku$. Znak minus przypomina, że siła działa w kierunku przeciwnym do kierunku rozciągania. Z drugiego prawa Newtona wiemy, że siła jest równa iloczynowi masy układu i jego przyspieszenia

$$ma = m \frac{d^2u}{dt^2} = -Ku. \quad (1.2)$$

Zależność ta stanowi podstawowe równanie opisujące swobodne drgania układów mechanicznych. Zazwyczaj wzór (1.2) przedstawiany jest w postaci równania różniczkowego

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + Ku = 0. \quad (1.3)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$u = A_1 \cos(\omega t), \quad (1.4)$$

opisująca chwilowe wychylenie cząstki z położenia równowagi. Pulsacja ω odnosi się do swobodnego ruchu sprężyny i związana jest z jej sprężystością i masą układu. Różniczkując dwukrotnie (1.4) otrzymamy wzór na przyspieszenie

$$a = \frac{d^2u}{dt^2} = -A_1 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (1.5)$$

i następnie wstawiając wynik do (1.3) otrzymujemy

$$-mA_1 \omega^2 \cos(\omega t) + K \omega^2 \cos(\omega t) = 0, \quad (1.6)$$

skąd

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (1.7)$$

Prędkość materialnego punktu drgającego układu otrzymamy różniczkując wychylenie cząstki po czasie. W akustyce wielkość tę nazywamy prędkością cząstkową lub prędkością akustyczną v

$$v = \frac{du}{dt} = -A_1 \omega \sin \omega t = -v_0 \sin \omega t. \quad (1.8)$$

Częstotliwość drgań sprężyny nie zależy ani od pozycji sprężyny, w której rozpoczął się ruch ani też od początkowego naciągnięcia sprężyny. Z równania ruchu możemy wyznaczyć bezpośrednio jedynie pulsację a nie jego amplitudę. Tę ostatnią wyznaczamy przez wprowadzenie warunków początkowych ruchu. Zanim to jednak zrobimy, zauważmy, że rozwiązaniem równania (1.3) jest również funkcja

$$u = A_2 \sin(\omega t). \quad (1.9)$$

Ogólne rozwiązanie jest więc sumą obu rozwiązań cząstkowych

$$u = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t). \quad (1.10)$$

Obie stałe A_1 i A_2 wyznaczamy z informacji o stanie układu w chwili rozpoczęcia ruchu. Przyjmijmy następujące warunki początkowe: w chwili $t=0$ masa jest wychylona do położenia U_0 , $u(0)=U_0$, a prędkość początkowa jest równa zero, $v(0)=0$. Z (1.10) wyznaczamy A_1 równe początkowemu wychyleniu masy $A_1 = U_0$. A_2 obliczamy wstawiając do pochodnej po czasie równania (1.10) warunek na prędkość początkową

$$A_1 \omega \cos(\omega t) - A_2 \omega \sin(\omega t) = 0,$$

skąd

$$A_2 = 0$$

i w rezultacie

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t). \quad (1.11)$$

Równanie (1.10) opisuje swobodne drgania sprężyny. Jeden cykl drgań powtarza się po zmianie pulsacji w 360° . Okresowość drgań zaznaczamy podając ich okres

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K/m}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

i częstotliwość

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{K/m}}{2\pi}.$$

Równanie ruchu zapisywane jest również w postaci

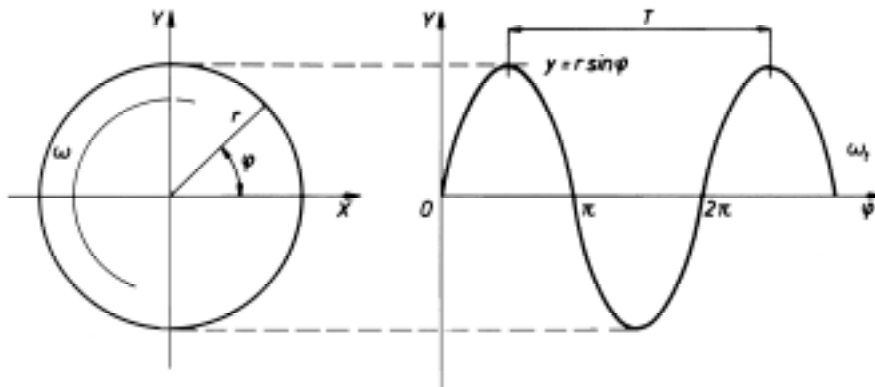
$$u(t) = U_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.12)$$

gdzie φ oznacza początkową fazę lub, co jest równoznaczne, początkowy kąt (w odniesieniu do pełnego okresu drgań równego 2π), w jakim znajduje się masa w chwili $t=0$. Odpowiednio, prędkość cząstki równa pochodnej wychylenia po czasie ma postać

$$v(t) = v_0 \sin(\omega t - \varphi) = U_0 \omega \sin(\omega t - \varphi). \quad (1.13)$$

Wychylenie cząstki jest opóźnione w fazie o 90° w odniesieniu do jej prędkości. Jeżeli przyjmiemy, że początkowa faza ruchu układu φ jest równa 0 to maksymalne wychylenie cząstki wystąpi w chwilach t , dla których $\sin \omega t = 1$, a więc dla $T/4, 3T/4, 5T/4, \dots$ Amplituda prędkości cząstkowej $V_0 = U_0 \omega$ osiąga maksima o $1/4$ okresu wcześniej tzn. w chwilach $0, T/2, T, 3T/2, \dots$

Pokazaliśmy, że prosty ruch harmoniczny, a do takiego zaliczamy swobodny ruch sprężyny, opisujemy za pomocą zmiennych w czasie funkcji sinus lub cosinus. Graficzna interpretacja ruchu harmonicznego polega na przypisaniu zmiennemu w czasie wychyleniu sprężyny ruchu cząstki po okręgu. Jeżeli cząstka porusza się po okręgu ze stałą prędkością kątową ω to wektor \mathbf{r} poprowadzony od środka okręgu do punktu na okręgu, w którym aktualnie znajduje się cząstka, obraca się o kąt φ proporcjonalny do czasu, $\varphi = \omega t$. W czasie obrotu długość rzutu wektora \mathbf{r} na X lub Y zmienia się właśnie według funkcji cosinus lub sinus $X = r \cos(\varphi)$ i $Y = r \sin(\varphi)$



Rys. III.2. Obrót wektora \mathbf{r} po okręgu jest przykładem ruchu harmonicznego, w którym amplituda wychylenia rzutu wektora \mathbf{r} na oś x zmienia się jak funkcja sinus iloczynu pulsacji i czasu ωt .

Falami harmonicznymi nazywamy takie zaburzenia ośrodka, których kształt (np. wychylenie) zmienia się jak funkcja sinus lub cosinus.

Drganie harmoniczne rozchodzące się z prędkością c wzdłuż osi x opisujemy wzorem

$$u(x, t) = U_0 \sin \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{c} \right) \right] = U_0 \sin [k(ct \pm x)], \quad (1.14)$$

przy czym znak - odpowiada rozchodzeniu się fali w kierunku dodatnim x a znak + w kierunku przeciwnym. Stała k , zwana liczbą falową, jest równa liczbie cykli fali przypadających na jednostkę długości i wynosi

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.15)$$

Fala powtarza się w przestrzeni po przebyciu odległości λ zwanej długością fali

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.16)$$

Im większa jest prędkość rozchodzenia się fali w ośrodku tym większa jest jej długość, natomiast ze wzrostem częstotliwości fali jej długość maleje.

Okres drgań $T = \lambda/c$ jest równy odcinkowi czasu, w którym fala przemieszcza się o odcinek drogi λ .

W matematycznej analizie harmonicznym zjawisk falowych zamiast współrzędnych x i y stosuje się płaszczyznę zespoloną, w której odpowiednikiem osi X jest dalej rzeczywista oś X natomiast osi Y odpowiada urojona oś Y o współrzędnej iY ($i = \sqrt{-1}$). W takim wypadku współrzędne wektora \mathbf{r} mają postać $X = r \cos(\omega t)$ i $Y = ir \sin(\omega t)$, a cały wektor możemy zapisać w postaci funkcji zespolonej $\mathbf{r} = |\mathbf{r}| \cos(\omega t) + |\mathbf{r}| i \sin(\omega t) = |\mathbf{r}| e^{i\omega t}$. Obliczenia w notacji zespolonej są znacznie prostsze niż przy użyciu funkcji sinus i cosinus, ponieważ przy mnożeniu i dzieleniu funkcji wykładniczych wykładniki dodają się lub odejmują.

Drganie harmoniczne (1.14) w zapisie zespolonym ma postać

$$u(x, t) = U_0 e^{i\omega(t \pm \frac{x}{c})} = U_0 e^{ik(ct \pm x)}. \quad (1.17)$$

1.3. Energia drgań

Pobudzając sprężynę do drgań dostarczamy do niej pewną ilość energii. Podczas drgań, energia przenosi się od sprężyny do masy i z powrotem, cyklicznie zmieniając energię z potencjalnej w kinetyczną i odwrotnie. W dowolnej chwili energia potencjalna zmagazynowana w sprężynie równa jest

$$E_p = \frac{1}{2} Ku^2 = \frac{1}{2} KU_0^2 \sin^2(\omega t - \varphi), \quad (1.18)$$

natomiast energia kinetyczna zgromadzona w masie równa się

$$E_k = mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 U_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi). \quad (1.19)$$

Energia kinetyczna równa jest zero, gdy wychylenie u jest maksymalne, wtedy bowiem prędkość układu znika. Energia kinetyczna osiąga maksimum, gdy układ przechodzi przez położenie spoczynkowe $u=0$, ponieważ właśnie wtedy prędkość ruchu jest największa. Energia potencjalna zmienia się odwrotnie, to znaczy osiąga maksimum, gdy $u=U_0$, natomiast maleje do zera dla $u=0$. Ponieważ całkowita energia układu musi być stała, więc korzystając z zależności $K = m\omega^2$ możemy zapisać całkowitą energię jako sumę chwilowej energii kinetycznej i potencjalnej,

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 U_0^2. \quad (1.20)$$

Energia układu jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy wychyleń układu. Dwukrotny wzrost tej amplitudy oznacza czterokrotny wzrost energii układu.

Rozpatrywany przykład jest w rzeczywistości fizycznie nierealizowalny. W czasie drgań, część energii wydzielą się w samej sprężynie a część oddana zostaje do ośrodka, w którym drga sprężyna. Swobodne drgania zanikają więc z upływem czasu, utrzymać je możemy jedynie wtedy, gdy do układu bezustannie będziemy dostarczać z zewnątrz energię równoważącą wymienione straty.

1.4. Fale w ośrodkach jednorodnych – równanie falowe

Ze względu na własności sprężyste, wszystkie miękkie tkanki biologiczne zaliczamy do cieczy. Dlatego też w dalszym ciągu ograniczymy się jedynie do opisu rozchodzenia się sprężystych fal podłużnych z pominięciem naprężeń ścinających. Pominiemy też tłumienie.

Fale akustyczne to w przybliżeniu proces rozchodzenia się w ośrodku zmian ciśnienia, w wyniku których następuje sprężanie lub rozprężanie ośrodka, przy czym zmienia się ciśnienie i proces rozprzestrzenia się. Przyjmijmy, że w stanie spoczynku gęstość cieczy wynosi ρ_0 , a ciśnienie p_0 . W procesie propagacji możemy wyróżnić dwa stany wzajemnie wymieniającej się energii – energii kinetycznej związanej prędkością akustyczną cząstek ośrodka i energii potencjalnej w postaci energii sprężystej w ściskanym materiale. Energię kinetyczną możemy wyznaczyć z zasady zachowania pędu natomiast energię kinetyczną towarzyszącą kompresji wyznacza się zazwyczaj na drodze eksperymentalnej.

Tkanka biologiczna w makroskopowym ujęciu przedstawia pewien przestrzenny rozkład cząstek w wodzie, która stanowi aż do 80% objętości tkanki. Stąd też opis propagacji fal dźwiękowych w wodzie może być bezpośrednio zastosowany w opisie rozchodzenia się fal w rzeczywistych tkankach. Cząstki ośrodka w postaci drobin ciała stałego wprowadzają niejednorodności odpowiadające za rozproszenie i absorpcję – składowe całkowitego tłumienia energii rozchodzącej się fali.

Do opisu fali dźwiękowej wykorzystamy równanie sił Eulera wynikające z drugiej zasady Newtona, równanie ciągłości i równanie stanu dla cieczy.

Ruch cieczy jest zazwyczaj opisywany za pomocą dwóch różnych metod, Lagrange'a i Eulera. W metodzie Lagrange'a przemieszczenie u elementu cieczy jest funkcją czasu i początkowych współrzędnych. Metoda ta jest bardzo wygodna w rozwiązywaniu jednowymiarowych zagadnień. W metodzie Eulera rozpatrywane są raczej zmiany ruchu w czasie przy ustalonym położeniu w przestrzeni. W metodzie Eulera pole prędkości opisane jest wektorem $v(x, y, z, t)$, a pola ciśnienia $p(x, y, z, t)$ i kondensacja $s(x, y, z, t)$ są polami skalarnymi.

1.4.1. Równanie stanu dla cieczy

O ile dla gazów idealnych obowiązuje izentropowe (akustyczne zjawiska są na tyle szybkie, że proces jest adiabatyczny i odwracalny) równanie stanu to dla cieczy stosujemy raczej fenomenologiczne podejście i izentropową zależność między ciśnieniem i gęstością ośrodka wyznacza się eksperymentalnie.

Niech ciśnienie P jest pewną funkcją gęstości ρ ,

$$P - P_0 = f(\rho), \quad (1.21)$$

gdzie:

P jest chwilowym ciśnieniem w punkcie (x, y, z) ,

P_0 jest ciśnieniem spoczynkowym w stanie równowagi,

p jest ciśnieniem akustycznym równym różnicy ciśnienia chwilowego i spoczynkowego, $p = P - P_0$.

Odpowiednio ρ jest gęstością chwilową ośrodka w (x, y, z) , ρ_0 jest gęstością ośrodka w stanie równowagi, gęstość akustyczna wynikająca z chwilowych zmian ciśnienia jest równa różnicy gęstości chwilowej i spoczynkowej, $\rho - \rho_0$.

Rozwijamy funkcję $f(\rho)$ w szereg Taylora

$$\begin{aligned} P &= P_0 + (\rho - \rho_0)f'(\rho_0) + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2!} f''(\rho_0) + \dots \\ &= \rho_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2!} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

Stąd

$$\begin{aligned} p = P - P_0 &= (\rho - \rho_0)f'(\rho_0) + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2!} f''(\rho_0) + \dots \\ &= (\rho - \rho_0) \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2!} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ponieważ $p \ll P_0$ oraz zmiany $\rho - \rho_0$ są bardzo małe, więc możemy pominąć wyrazy wyższych rzędów zatrzymując jedynie $(\rho - \rho_0)$ i otrzymujemy liniowe równanie

$$p = (\rho - \rho_0) \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \quad (1.24)$$

Ciśnienie wyrażamy w Pascalach, $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$, natomiast gęstość w kg/m^3 . Iloraz ciśnienia i gęstości ma wymiar $(\text{m/s})^2$, czyli wyraża prędkość w kwadracie: $P/\rho = (\text{prędkość})^2$.

Tak więc

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} = c^2 \quad (1.25)$$

i po podstawieniu do (1.24) otrzymujemy *równanie stanu*,

$$p = (\rho - \rho_0)c^2 \quad (1.26)$$

Wprowadźmy następnie moduł sprężystości adiabaticznej (objętościowy),

$$B_{ad} = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)$$

Po uwzględnieniu (1.24) otrzymujemy równanie stanu w postaci:

$$p = \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) B_{ad} \quad (1.27)$$

i stąd prędkość dźwięku jest równa $c = \sqrt{\frac{B_{ad}}{\rho_0}}$.

Jeżeli kondensacja jest bardzo mała, $|s| \ll 1$, to

$$p = s B_{ad}. \quad (1.28)$$

1.4.2. Równanie sił Eulera

Niech elementarna objętość Δv porusza się wraz z cieczą. Wypadkowa siła działająca na element Δv pod wpływem różnicy ciśnień ∇p jest równa $-\Delta v \cdot \nabla p$. Z drugiego prawa Newtona wiemy, że siła ta odpowiada iloczynowi masy cząstki $-\Delta v \cdot \rho$ i jej przyspieszenia \vec{a} . Po przyrównaniu obu sił otrzymujemy równanie

$$\rho \vec{a} = -\nabla p. \quad (1.29)$$

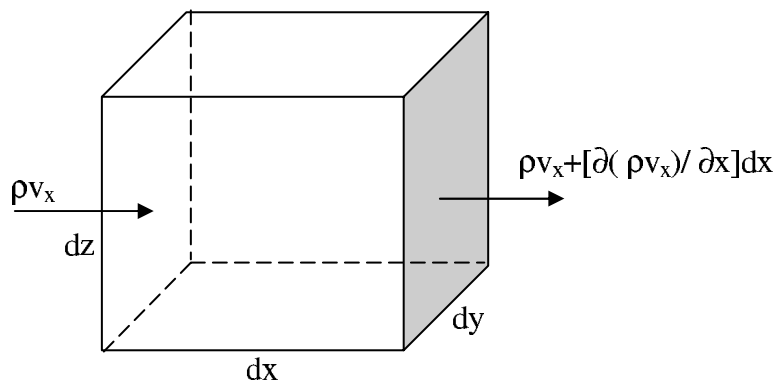
Jak już wspomniano prędkość cząstki $\vec{v}(x,y,z,t) = \vec{v}(\vec{r},t)$ jest funkcją czasu i położenia i przyspieszenie jest sumą dwóch składników. Pierwszy związany jest z lokalną zmianą prędkości cząstki w wybranym punkcie przestrzeni w czasie Δt , drugi natomiast wynika z faktu poruszania się cząstki, która pokonuje pewną drogę $\Delta \vec{r}$ w czasie Δt .

Składowe wektora przyspieszenia \vec{a} są więc równe $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$, gdzie operator różniczkowania ma postać $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$.

W rezultacie otrzymujemy równanie ruchu

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p. \quad (1.30)$$

Pierwszy składnik w nawiasie nosi nazwę *pochoďnej lokalnej*, drugi *pochoďnej konwekcyjnej* związanej z ruchem cząstki



Rys. III.3. Rozchodzenie się fali podłużnej, równowaga sił dla fali ciśnienia.

Dla fal dźwiękowych o niewielkich amplitudach p i ρ w niewielkim stopniu zmieniają się w czasie, a prędkość cząstkowa v jest dużo mniejsza od prędkości fazowej rozchodzenia się dźwięku w wodzie. Dla typowych natężeń fal ultradźwiękowych w ultrasonografii prędkość akustyczna nie przekracza 10 cm/s, około 150 razy mniej od prędkości propagacji fali.

W takim przypadku w wyrażeniu na przyspieszenie możemy pominąć pochodną konwekcyjną $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$. Przyspieszenie jest po prostu równe $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ i równanie sił staje się (w przybliżeniu) równaniem liniowym.

Tak więc zlinearyzowane równanie sił Eulera ma postać

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (1.31)$$

1.4.3. Równanie ciągłości

Równanie ciągłości wyraża zasadę zachowania masy. Zmiana masy elementu musi być równa różnicy masy wpływającej i wypływającej przez element dV .

$$\left\{ \rho v_x - \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dydz = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV. \quad (1.32)$$

Podobne wyrażenie obowiązuje dla pozostałych współrzędnych y i z , tak, że całkowity przepływ masy wyraża się wzorem

$$-\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dV = -\nabla(\rho \vec{v}) dV. \quad (1.33)$$

Szybkość, z jaką masa rośnie w objętości jest równania $\frac{\partial p}{\partial t} dV$ i stąd

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.34)$$

Jest to równanie nieliniowe, ponieważ ρ i v są funkcjami zmiennych położenia. Drugi wyraz to iloczyn prędkości cząstkowej i chwilowej gęstości, są to zmienne akustyczne. Ale jeżeli w miejsce gęstości ρ podstawimy $\rho = \rho_0(1+s)$ i ρ_0 będzie dostatecznie wolnozmienną funkcją czasu oraz $s \ll 1$, to po wstawieniu do nieliniowego równania ciągłości (1.34) mamy:

$$\frac{\partial(\rho_0(1+s))}{\partial t} + \nabla((\rho_0(1+s))\vec{v}) = 0. \quad (1.35)$$

Ponieważ możemy przyjąć, że ρ_0 nie zmienia się w przestrzeni to rezultacie otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{\partial(s)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.36)$$