

15. Transformata Fouriera sygnału czasu dyskretnego

Rozpatrzmy ponownie model procesu próbkowania przedstawiony na rys. 14.1. Wynik $g(t)$ próbkowania jest otrzymywany jako iloczyn sygnału próbkowanego $u(t)$ oraz sygnału kluczującego $s(t)$:

$$(15.1) \quad g(t) = u(t)s(t)$$

Jako sygnał kluczujący przyjmujemy ciąg impulsów Diraca:

$$(15.2) \quad s(t) = \text{rep}_{T_p} \delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_p)$$

W tym przypadku funkcja gęstości widmowej wyniku próbkowania $g(t)$ jest następująca:

$$(15.3) \quad \begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)s(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_p) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_p) e^{-j\omega kT_p} \end{aligned}$$

Otrzymany wzór stanowi podstawę definiowania przekształcenia Fouriera dla sygnałów o czasie dyskretnym DTFT (*discrete-time Fourier transform*). Przekształcenie to przyporządkowuje ciągowi próbek $u(kT_p)$ transformatę $U_d(e^{j\omega T_p})$ o postaci:

$$(15.4) \quad U_d(e^{j\omega T_p}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_p) e^{-j\omega kT_p}$$

W ogólnym przypadku ciąg próbek $u(kT_p)$ ma nieskończoną długość. Transformata $U_d(e^{j\omega T_p})$ jest funkcją zmiennej ω i przyjmuje wartości zespolone¹. Funkcja

¹ W celu określenia warunków istnienia transformaty zauważmy, że $\left| U_d(e^{j\omega T_p}) \right| \leq$

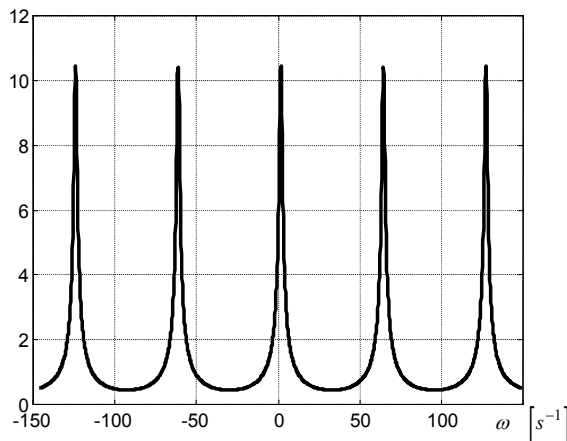
$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(kT_p)| \left| e^{-j\omega kT_p} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(kT_p)|.$$

$$(15.5) \quad G(\omega) = U_d \left(e^{j\omega T_p} \right)$$

jest okresowa:

$$(15.6) \quad G\left(\omega + l \frac{2\pi}{T_p}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_p) \exp\left[-j\left(\omega + l \frac{2\pi}{T_p}\right)kT_p\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_p) \exp\left[-j(k\omega T_p + lk2\pi)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_p) \exp\left[-j(k\omega T_p)\right] = G(\omega)$$



Rys. 15.1. Wykres wartości $\left| U_d \left(e^{j\omega T_p} \right) \right|$ w funkcji ω dla ciągu próbek (15.8).

Do obliczeń przyjęto: $T_p = 0.1[s]$, $c = 1[s^{-1}]$.

Przykład 15.1. Rozpatrzmy impuls $u(t)$ o następującej postaci:

$$(15.7) \quad u(t) = \begin{cases} \exp(-ct), & \text{jeśli } t \geq 0 \\ 0, & \text{jeśli } t < 0 \end{cases}$$

gdzie: c – dodatni parametr. Utwórzmy ciąg próbek tego impulsu:

$$(15.8) \quad u(kT_p) = \begin{cases} \exp(-ckT_p), & \text{jeśli } k \geq 0 \\ 0, & \text{jeśli } k < 0 \end{cases}$$

Transformata $U_d \left(e^{j\omega T_p} \right)$ ciągu próbek ma postać:

$$(15.9) \quad U_d(e^{j\omega T_p}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ckT_p} e^{-j\omega kT_p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(c+j\omega)T_p} \right)^k = \frac{1}{1 - e^{-(c+j\omega)T_p}}$$

Wykres wartości bezwzględnej $U_d(e^{j\omega T_p})$ w funkcji ω jest przedstawiony na rys. 15.1.

Niech

$$(15.10) \quad U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

będzie funkcją gęstości widmowej sygnału $u(t)$ czasu ciągłego. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w punkcie poprzednim funkcja gęstości widmowej sygnału:

$$(15.11) \quad g(t) = u(t) \text{rep}_{T_p} \delta(t) = u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_p)$$

jest następująca:

$$(15.12) \quad G(\omega) = \frac{1}{T_p} \text{rep}_{\frac{2\pi}{T_p}} U(\omega) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_p}\right)$$

W przypadku, gdy funkcja gęstości widmowej $U(\omega)$ spełnia warunek:

$$(15.13) \quad U(\omega) = 0 \quad \text{dla } |\omega| > \frac{\pi}{T_p}$$

mamy:

$$(15.14) \quad G(\omega) = \frac{1}{T_p} U(\omega) \quad \text{dla } |\omega| < \frac{\pi}{T_p}$$

Przykład 15.2. Rozpatrzmy impuls $u(t)$ o następującej postaci:

$$(15.15) \quad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } t \in [0, T) \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

Dla okresu próbkowania $T_p < T$ utworzymy ciąg próbek:

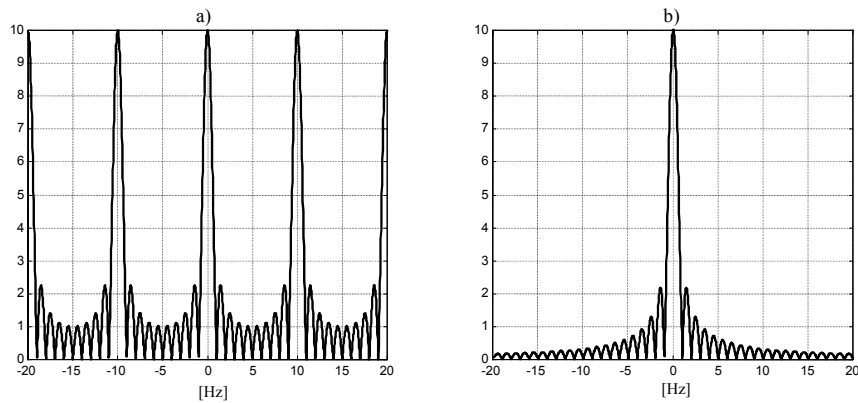
$$(15.16) \quad u(kT_p) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } k \in \left[0, \frac{T}{T_p}\right) \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

Po oznaczeniu liczby niezerowych próbek przez N otrzymamy:

$$(15.17) \quad U_d(e^{j\omega T_p}) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k T_p} = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-j\omega T_p})^k = \frac{1 - e^{-j\omega N T_p}}{1 - e^{-j\omega T_p}}$$

Jeśli $N T_p = T$, otrzymujemy:

$$(15.18) \quad U_d(e^{j\omega T_p}) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 - e^{-j\omega T_p}}$$



Rys. 15.2. Wykres $\left|U_d(e^{j2\pi T_p f})\right|$, b) wykres $\left|\frac{1}{T_p}U(2\pi f)\right|$.

Do obliczeń przyjęto: $T_p = 0.1[s]$, $N = 10$.

W celu sprawdzenia (15.14) obliczymy, że funkcja gęstości widmowej impulsu (15.15) jest następująca:

$$(15.19) \quad U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

Dla małych wartości ωT_p mamy:

$$(15.20) \quad U_d(e^{j\omega T_p}) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 - e^{-j\omega T_p}} \approx \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 - (1 - j\omega T_p)} = \frac{1}{T_p} U(\omega)$$

Uzyskany wynik potwierdza, że $G(\omega) = U_d(e^{j\omega T_p}) \approx \frac{1}{T_p} U(\omega)$ dla małych wartości

ωT_p . Wykres modułu funkcji gęstości $U_d(e^{j\omega T_p})$ został przedstawiony na rys. 15.2.

Niech $u(0), u(T_p), \dots, u[(N-1)T_p]$ oznacza próbki tak wybrane, że wszystkie inne przyjmują wartości zerowe. W tym przypadku wzór (15.4) przyjmuje postać:

$$(15.21) \quad U_d(e^{j\omega T_p}) = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT_p) e^{-j\omega k T_p}$$

Interesujące wyniki otrzymuje się, obliczając wartości funkcji gęstości $U_d(e^{j\omega T_p})$ dla pulsacji:

$$(15.22) \quad \omega = \frac{2\pi}{T_p} \frac{n}{N}, \quad \text{gdzie: } n \in [0, N-1].$$

Z wzoru (15.21) otrzymujemy:

$$(15.23) \quad U_d \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{T_p} \frac{n}{N} T_p \right) \right] = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT_p) \exp \left(-j \frac{2\pi}{T_p} \frac{n}{N} k T_p \right) = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT_p) w_N^{-nk}$$

gdzie:

$$(15.24) \quad w_N = \exp \left(j 2\pi \frac{1}{N} \right)$$

Jak wiemy, wyznaczona dla wektora próbek $(u(0), u(T_p), \dots, u[(N-1)T_p])$ transformata DFT ma postać wektora $(\bar{U}_0, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{N-1})$, gdzie:

$$(15.25) \quad \bar{U}_n = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT_p) w_N^{-nk} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Z wzoru (15.23) wynika zatem, że obliczona na podstawie próbek transformata DFT jest równa ciągowi próbek funkcji gęstości $U_d(e^{j\omega T_p})$ pobranych w punktach określonych wzorem (15.22). Prześledzimy konsekwencje tego faktu. Przy spełnieniu warunku (15.13) i po uwzględnieniu wzoru (15.14) otrzymujemy:

$$(15.26) \quad \bar{U}_n = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT_p) w_N^{-nk} = U_d \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{T_p} \frac{n}{N} T_p \right) \right] \cong \frac{1}{T_p} U \left(\frac{2\pi}{T_p} \frac{n}{N} \right)$$

Zależność ta oznacza, że w przypadku ograniczonego pasma sygnału $u(t)$ – w sensie spełnienia warunku (15.13) – można wykorzystać transformatę DFT do aproksymacji funkcji gęstości $U(\omega)$.

Przykład 15.3. Rozważymy impuls prostokątny przedstawiony w przykładzie 15.2. Przyjmijmy: $T = 1[s]$, $T_p = 0.1[s]$. Rozpatrzmy następujący ciąg próbek tego sygnału:

$$(15.27) \quad [u(0), u(T_p), \dots, u(9T_p)] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

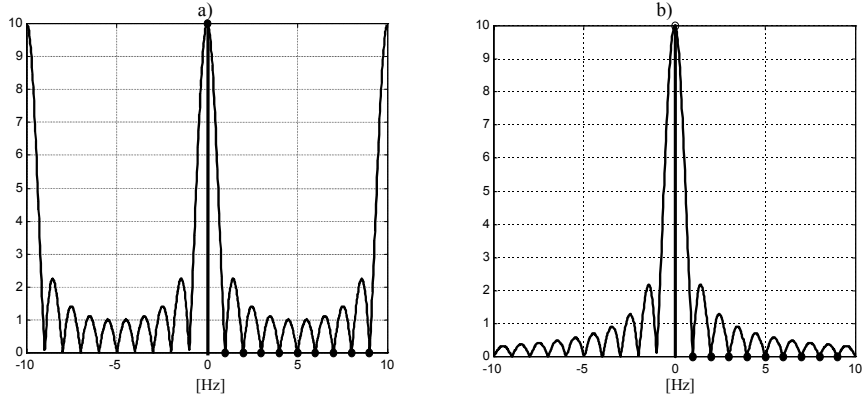
Wykres transformaty DFT obliczonej dla tego ciągu (na tle funkcji gęstości $\frac{1}{T_p} U(\omega)$ oraz $U_d(e^{j\omega T_p})$) został przedstawiony na rys. 15.3.

Dla porównania na rys. 15.4 sporządzono analogiczne wykresy dla następującego ciągu próbek tego samego sygnału:

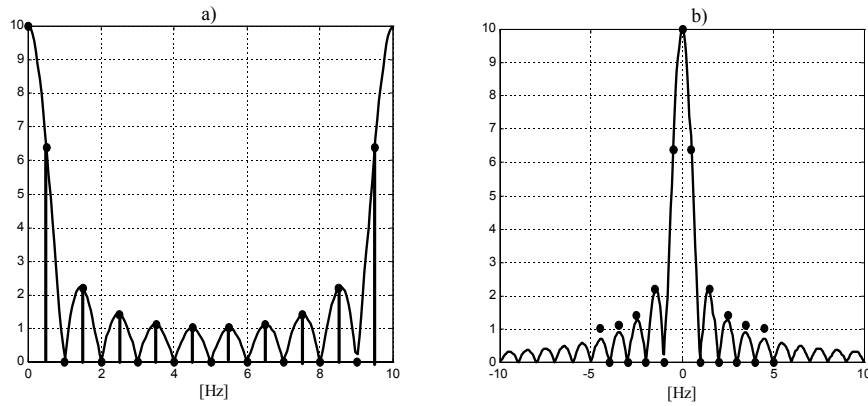
$$(15.28) \quad [u(0), u(T_p), \dots, u(19T_p)] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

Na rys. 15.4a prążki oznaczają wartości $|\bar{U}_n|$ transformaty DFT ciągu (15.28).

Na rys. 15.4b wartości te naniesiono w postaci punktów.



Rys. 15.3. a) Wykres $\left| U_d \left(e^{j\omega T_p} \right) \right|$, b) wykres $\left| \frac{1}{T_p} U(\omega) \right|$. Prążki (zakończone punktami) oznaczają wartości $\left| \bar{U}_n \right|$ transformaty DFT ciągu (15.27)



Rys. 15.4. a) Wykres $\left| U_d \left(e^{j\omega T_p} \right) \right|$, b) wykres $\left| \frac{1}{T_p} U(\omega) \right|$

Często wygodnie jest zaznaczać wyraźnie, że funkcja ma argument dyskretny. W tym celu stosuje się często oznaczenie: $u(kT_p) = u[k]$. Wówczas wykorzystuje się także pojęcie pulsacji znormalizowanej, określonej następująco:

$$(15.29) \quad \nu = \omega T_p$$

W tym przypadku wzór (15.4), definiujący transformatę DTFT, zapisuje się w postaci następującej: